3. La méthode de l'hyperbole revisitée

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

PROPOSITION 4. *Avec les notations du paragraphe 1, on a:*

$$dN = e^{d\Pi},$$

où $\Pi(x) := P(x) + \frac{1}{2}P(x^{1/2}) + \frac{1}{3}P(x^{1/3}) + \dots$

Cette proposition traduit l'identité eulérienne formelle:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n^s} = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-\frac{1}{\beta_n^s}} = \exp \sum_{n\geq 1,\, k\geq 1} \frac{1}{k\beta_n^{ks}}.$$

Ainsi, la théorie de Beurling ressortit à l'étude de l'exponentielle et du logarithme dans l'algèbre de mesures $\mathcal{M}$.

FORMULAIRE

Nous donnons ci-dessous une liste de propriétés d'usage constant pour le calcul dans $\mathcal{M}$.

1. La multiplication par t^r est pour tout nombre complexe r un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}$. En particulier, pour toute série entière $f(z)$, on a
$$t^r f(d\alpha) = f(t^r d\alpha).$$
2. $d\alpha * \frac{dt}{t} = \alpha(t)\frac{dt}{t}$.
3. $(dt)^{*n} = \dfrac{(\log t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$.
4. $(\delta + dt) * (\delta - \dfrac{dt}{t}) = \delta$.
5. $\delta + dt = e^{d\tau}$, où
$$\tau(x) := \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{\log t}.$$

3. LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE REVISITÉE

Si $d\alpha * d\beta = d\gamma$, on a

$$\gamma(x) = \int_{1\leq st\leq x} d\alpha(s)d\beta(t) = \int_1^x \beta\left(\frac{x}{s}\right)d\alpha(s) = \int_1^x \alpha\left(\frac{x}{t}\right)d\beta(t)$$
$$= \int_1^y \beta\left(\frac{x}{s}\right)d\alpha(s) + \int_1^{x/y} \alpha\left(\frac{x}{t}\right)d\beta(t) - \alpha(y)\beta\left(\frac{x}{y}\right)$$

pour tout x et tout y tels que $1 \leq y \leq x$.

Cette façon de calculer un produit de convolution en introduisant un paramètre y, déterminé ensuite au mieux suivant la question considérée, a été imaginée par Dirichlet dans [9]. C'est la méthode de l'hyperbole. L'idée de Diamond est que l'itération de ce principe de calcul permet d'étudier des mesures définies dans $\mathcal{M}$ au moyen de séries entières comme au paragraphe précédent, par exemple des exponentielles d'autres mesures.

On a immédiatement l'estimation suivante :

LEMME 1. *Si $d\alpha$ et $d\beta$ appartiennent à $\mathcal{M}$, on a, pour $d\gamma = d\alpha * d\beta$ et $x = yz$, où $y \geq 1$, $z \geq 1$:*

$$|\gamma(x)| \leq \|d\alpha\|_y \sup_{[z,x]} |\beta| + \|d\beta\|_z \sup_{[y,x]} |\alpha| + |\alpha(y)\beta(z)| .$$

Le lemme suivant donne l'inégalité fondamentale dans la méthode de Diamond :

LEMME 2. *Soit $d\alpha$ une mesure. Posons pour tout entier $n \geq 1$,*

$$d\alpha_n := (d\alpha)^{*n} ,$$

et supposons que :

1) $\|d\alpha\|_x \leq A(x)$;

2) $|\alpha(x)| \leq B(x)C(\log x) \leq M$,

où A et B sont croissantes au sens large et C décroissante au sens large, et M est un nombre réel positif.

Alors, pour $n \geq 1$, n entier, et $x \geq 1$, x réel, on a :

$$|\alpha_n(x)| \leq n(A(x) + M)^{n-1} B(x)\, C\Big(\frac{\log x}{n}\Big) .$$

Démonstration. Observons pour commencer que l'hypothèse 1) entraîne :

$$\|d\alpha_n\|_z \leq A(x)^n ,$$

pour $n \geq 1$, $1 \leq z \leq x$.

On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est contenu dans l'hypothèse 2). Le passage de n à $n+1$ se fait en appliquant le lemme 1 avec $y = x^{\frac{1}{n+1}}$, $z = x^{\frac{n}{n+1}}$, et $\beta = \alpha_n$. On a :

$$|\alpha_{n+1}(x)| \leq n(A(x) + M)^{n-1} B(x) C\Big(\frac{\log z}{n}\Big) A(x)$$
$$+ B(x)C(\log y)A(x)^n + Mn(A(x) + M)^{n-1} B(x) C\Big(\frac{\log z}{n}\Big) .$$

Or $\log y = \dfrac{\log z}{n} = \dfrac{\log x}{n+1}$ donc

$$|\alpha_{n+1}(x)| \leq B(x)C\Big(\frac{\log x}{n+1}\Big)\left[nA(x)(A(x)+M)^{n-1} + A(x)^n + Mn(A(x)+M)^{n-1}\right]$$
$$\leq (n+1)(A(x)+M)^n B(x)C\Big(\frac{\log x}{n+1}\Big),$$

ce qui démontre le lemme 2. □

Ce résultat fournit une estimation générale, facile à utiliser, comme nous le verrons au paragraphe 4. Il faut cependant garder à l'esprit la possibilité d'obtenir parfois de meilleures majorations grâce à des renseignements supplémentaires, spécifiques au problème considéré.

Ainsi, nous allons conclure ce paragraphe en donnant la démonstration complète du théorème 6. Pour rédiger cette preuve, qui ne figure pas dans [7], nous avons bénéficié de fructueuses conversations avec H. G. Diamond.

On démontre en fait un résultat plus fort que le théorème 6. Soit donc $\boldsymbol{\beta}$ une suite de nombres premiers généralisés telle que (avec la notation de la proposition 4)

$$\int_1^x \frac{d\Pi(t)}{t} = \int_1^x \frac{1-t^{-1}}{t\log t}dt + \log c + O(\log^{-a} x),$$

où c et a sont des constantes positives. Alors

$$N(x) = cx + O(x\log^{2-a} x).$$

C'est l'énoncé du theorème 3.3a de [7]. Sa démonstration repose sur l'inégalité fondamentale suivante. Si

$$d\nu := t^{-1}(d\Pi - d\tau - (\log c)\delta) \quad \text{et} \quad d\nu_n := (d\nu)^{*n},$$

alors

$$|\nu_n(x)| \leq nA_0(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}\log^{-a} x$$

pour $n \geq 1, x > 1$, où A_0 et A_1 sont des constantes positives. Observons que l'application du lemme 2 donne ici un facteur supplémentaire n^a.

Pour démontrer cette inégalité, on procède bien entendu par récurrence sur n. Introduisons au préalable des constantes K_1, K_2 et K_3 telles que les inégalités suivantes soient vérifiées pour $x > 1$:

$$|\nu(x)| \leq K_1 \log^{-a} x;$$

$$|\nu(x)| \leq K_2;$$

$$\|d\nu\|_x \leq 2\log\log 3x + K_3.$$

LEMME 3. *Sous les trois hypothèses ci-dessus, on a, pour $n \geq 1$ et $x > 1$,*

$$\int_1^{\sqrt{x}} \Big[\Big(1 - \frac{\log t}{\log x}\Big)^{-a} - 1\Big] |d\nu_n|(t) \leq nK_4(2\log\log 3x + K_3)^{n-1},$$

où K_4 est une constante positive.

Démonstration. Si $0 \leq u \leq 1/2$, on a $(1-u)^{-a} - 1 \ll u$. L'inégalité à démontrer est claire si $1 \leq x < 2$, pourvu que K_4 soit assez grande. Si $x \geq 2$, l'intégrale est

$$\ll (\log x)^{-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t |d\nu_n|(t) \leq (\log x)^{-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t |d\nu|^{*n}(t).$$

Comme la multiplication par $\log t$ est une dérivation de $\mathcal{M}$, la dernière intégrale vaut

$$\begin{aligned} n\int_1^{\sqrt{x}} |d\nu|^{*(n-1)} * (\log t|d\nu|)(t) &= n\int_1^{\sqrt{x}} \Big(\int_1^{\sqrt{x}/t} |d\nu|^{*(n-1)}\Big) \log t|d\nu|(t) \\ &\leq n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log t}{t}(d\Pi + d\tau + |\log c|\delta) \\ &= n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t\Big(d\nu + 2\frac{d\tau}{t} + (\log c + |\log c|)\delta\Big) \\ &\ll n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \log x, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On peut maintenant démontrer l'inégalité fondamentale ci-dessus. Posons $A_0 = K_1$ et $A_1 = K_3 + K_4 + 2^a K_2$. L'inégalité étant alors vérifiée pour $n = 1$, supposons la vérifiée au rang n. Nous aurons, pour $x > 1$:

$$\nu_{n+1}(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \nu_n\Big(\frac{x}{t}\Big) d\nu(t) + \int_1^{\sqrt{x}} \nu\Big(\frac{x}{t}\Big) d\nu_n(t) - \nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x}).$$

La première intégrale est majorée par

$$\begin{aligned} &nA_0(2\log\log 3x + A_1)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{-a} |d\nu|(t) \\ &\qquad \leq nA_0(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}(2\log\log 3x + K_3 + K_4)\log^{-a} x. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est majorée par

$$\begin{aligned} &K_1 \log^{-a} x \int_1^{\sqrt{x}} \Big(1 - \frac{\log x}{\log t}\Big)^{-a} |d\nu_n|(t) \\ &\qquad \leq K_1 \log^{-a} x \left[(2\log\log 3x + K_3)^n + nK_4(2\log\log 3x + K_3)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\left|\nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x})\right| \leq n2^a K_2 A_0 (2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \log^{-a} x\,.$$

L'inégalité fondamentale au rang $n+1$ résulte donc de:

$$\begin{aligned} &n A_0 (L + A_1)^{n-1}(L + K_3 + K_4) + K_1 (L + K_3)^n \\ &\qquad + nK_1K_4(L + K_3)^{n-1} + 2^a K_2 A_0 n (L + K_3)^{n-1} \leq (n+1)A_0(L + A_1)^n\,, \end{aligned}$$

où $L := 2\log\log 3x$, et cela est vrai, vu les définitions de A_0 et A_1.

En conclusion,

$$d\Pi = d\tau + (\log c)\delta + t d\nu$$

donc

$$dN = e^{d\Pi} = ce^{d\tau} * (te^{d\nu}) = c(\delta + dt) * (te^{d\nu})$$

d'où

$$\begin{aligned} N(x) &= c\int_1^x \Big(\int_1^{x/u} \delta + dt\Big) u e^{d\nu} \\ &= cx\int_1^x e^{d\nu} = cx + cx\sum_{n\geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!}\,. \end{aligned}$$

L'inégalité fondamentale permet de majorer la dernière somme:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!} \leq A_0 \log^{-a} x \sum_{n\geq 1} \frac{(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}}{(n-1)!} = A_0 e^{A_1} (\log 3x)^2 \log^{-a} x\,,$$

d'où le résultat.

4. Une application

Dans ce paragraphe, nous proposons une variation sur un thème abordé dans [2] à propos de la fonction d'Euler.

THÉORÈME 9. *Soit* $\boldsymbol{\beta}$ *une suite de nombres premiers généralisés telle que* β_n *diffère du n-ème nombre premier usuel* p_n *par une quantité* $O(n^a)$, *où* $0 \leq a < 1$. *On a alors, pour tout* c *fixé,* $c < \sqrt{2(1-a)}$,

$$\varepsilon(x) \ll \mathcal{L}(x)^{-c}\,,$$

pour $x \geq 3$, *où* $\mathcal{L}(x) := e^{\sqrt{\log x \log\log x}}$.