RETOUR SUR UN THÉORÈME DE CHEVALLEY

Autor(en): **Luna, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-64453

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 45 (1999), p. 317–320

RETOUR SUR UN THÉORÈME DE CHEVALLEY

par D. LUNA

ABSTRACT. A new proof is given of a classical result due to Chevalley, concerning the unipotent radical of algebraic groups.

Soit G un groupe algébrique affine connexe (le corps de base k étant algébriquement clos), et soit T un tore maximal de G.

Lorsqu'on développe la théorie des groupes algébriques (voir par exemple les ouvrages [Bo] ou [Sp]), après quelques généralités (sur la décomposition de Jordan, les espaces homogènes, les groupes résolubles*), ...), on commence par établir certaines propriétés des sous-groupes de Borel : on montre que les sous-groupes de Borel sont conjugués, et que tout sous-groupe de Borel est égal à son normalisateur; de plus, si $\mathbf{B}^T$ désigne l'ensemble des sous-groupes de Borel de G contenant T, on montre que $\mathbf{B}^T$ est fini et que le normalisateur $N_G(T)$ de T opère transitivement dans $\mathbf{B}^T$, etc. Puis on introduit (le radical et) le radical unipotent de G, noté $R_u(G)$ dans la suite, et on met le cap sur la structure des groupes semi-simples et réductifs.

C'est ici qu'apparaît le résultat charnière suivant, crucial pour la suite :

THÉORÈME (Chevalley). *La composante neutre de l'intersection des $R_u(B)$ ($B \in \mathbf{B}^T$), est égale au radical unipotent de G.*

Les preuves de ce théorème qu'on trouve dans la littérature (voir [Bo] § 13, page 174, ou [Sp] chap. 7, page 130), sont proches de la preuve originale de Chevalley ([Ch], exp. 12). Celle-ci utilise déjà quelques propriétés des « racines » de G et se trouve ainsi imbriquée dans l'étape suivante de la théorie : en effet, le théorème de Chevalley est utilisé à son tour lorsqu'on

*) Pour une présentation simple des théorèmes de structure des groupes algébriques affines résolubles connexes, voir aussi [Do].

montre que les racines de G forment un « système de racines » (voir [Bo] § 14 et [Sp] chap. 8). Dans cette note, on propose une preuve plus « basique », plus proche de l'esprit géométrique du début de la théorie.

Je voudrais remercier le referee pour ses remarques constructives.

1. Notons C la composante neutre de l'intersection des $R_u(B)$ $(B \in \mathbf{B}^T)$. Désignons par X la variété des drapeaux de G, et par X^T l'ensemble des points fixes de T dans X. Pour tout $p \in X^T$, posons $X(p) = \{x \in X \mid p \in \overline{T \cdot x}\}$.

PROPOSITION. *Les $X(p)$ $(p \in X^T)$ sont des ouverts affines de X, stables par C.*

Montrons d'abord que la proposition implique le théorème. Il est clair que $R_u(G) \subset C$. Pour établir l'inclusion opposée, il suffit de montrer que C opère trivialement dans X.

Puisque T et C sont résolubles connexes et que X est complet, les seules orbites fermées de T et de C dans X sont les points fixes. Par suite, les $X(p)$ $(p \in X^T)$ recouvrent X, et pour tout $x \in X$, il existe dans $\overline{C \cdot x}$ un point y fixé par C. Si $p \in X^T$ est tel que $y \in X(p)$, alors $X(p)$ contient aussi $C \cdot x$. Mais toute orbite d'un groupe unipotent dans une variété affine est fermée (voir [Bo] page 88, ou [Sp] page 37). D'où $x = y$, ce qui montre bien que C opère trivialement dans X.

2. Prouvons maintenant la proposition. Comme tout espace homogène, on peut plonger X dans un $\mathbf{P}(V)$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. On peut supposer que X ne soit contenu dans aucun $\mathbf{P}(W)$, quel que soit l'espace linéaire propre W de V. Choisissons un groupe à un paramètre multiplicatif $\lambda\colon k^\star \to T$ tel que $k^\star$, opérant dans V à travers λ, ait les mêmes vecteurs propres que T.

On utilisera la « décomposition de Białynicki-Birula » de X associée à λ (voir [B-B] et aussi [Bo], 13.3). Pour tout $p \in X^T$, posons

$$X(\lambda, p) = \{x \in X \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot x = p\}.$$

Les $X(\lambda, p)$ $(p \in X^T)$ sont localement fermés dans X et leur réunion (disjointe) est égale à X. Puisque X^T est fini, il existe un (unique) $p^\circ \in X^T$ tel que $X(\lambda, p^\circ)$ est ouvert dans X. Pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, notons $[v]$ le point de $\mathbf{P}(V)$ « en dessous » de v. Soit $v_1, \ldots, v_d$ une base de V, formée de vecteurs propres de T, et telle que $[v_1] = p^\circ$. Soient n_i $(i = 1, \ldots, d)$ les entiers tels

que $\lambda(t)v_i = t^{n_i}v_i$. Désignons par $V^\star$ l'espace vectoriel dual de V, et par $v_1^\star, \ldots, v_d^\star$ la base duale de $V^\star$. Comme on suppose que X n'est contenu dans aucun $\mathbf{P}(W)$, W sous-espace linéaire propre de V, il existe $[v] \in X(\lambda, p^\circ)$ tel que $\langle v, v_i^\star \rangle \neq 0$ quel que soit $i = 1, \ldots, d$. On en déduit que $n_1 < n_i$ $(i \geq 2)$, et que $X(\lambda, p^\circ) = \{[v] \in X \mid \langle v, v_1^\star \rangle \neq 0\}$. En particulier $X(\lambda, p^\circ)$ est un ouvert affine de X.

Montrons que $X(\lambda, p^\circ)$ est stable par C. Désignons par $v_1^\perp$ l'hyperplan de $V^\star$ orthogonal à v_1. Le groupe G opère aussi dans $V^\star$ et $\mathbf{P}(V^\star)$. Si $G \cdot w$ est une orbite de G contenue dans $v_1^\perp$, alors w est orthogonal à tout vecteur de $G \cdot v_1$, donc $w = 0$ (car $G \cdot v_1$ engendre V comme espace vectoriel). Par conséquent, toute orbite de G dans $\mathbf{P}(V^\star)$ rencontre $\mathbf{P}(V^\star) \setminus \mathbf{P}(v_1^\perp)$. Puisque $\lambda(t)v_i^\star = t^{-n_i}v_i^\star$ $(i = 1, \ldots, d)$, tout $y \in \mathbf{P}(V^\star) \setminus \mathbf{P}(v_1^\perp)$ vérifie $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) \cdot y = [v_1^\star]$, d'où il suit que l'orbite $G \cdot [v_1^\star]$ est fermée dans $\mathbf{P}(V^\star)$. Notons P le groupe d'isotropie de G en $[v_1^\star]$. Comme P est parabolique et contient T, P contient un $B \in \mathbf{B}^T$. Par suite C est contenu dans P. Comme C est unipotent, il fixe non seulement $[v_1^\star]$ mais aussi $v_1^\star$. Puisque $X(\lambda, p^\circ) = \{[v] \in X \mid \langle v, v_1^\star \rangle \neq 0\}$, il s'ensuit bien que $X(\lambda, p^\circ)$ est stable par C.

Enfin, on a $X(\lambda, p^\circ) = X(p^\circ)$ (en effet $X(\lambda, p^\circ) \subset X(p^\circ)$ est vrai par définition, et l'autre inclusion vient du fait que $X(\lambda, p^\circ)$ est ouvert, stable par T, et contient p°). Le groupe $N_G(T)$, qui opère transitivement dans X^T, permute les $X(p)$ $(p \in X^T)$. Par ailleurs, $N_G(T)$ normalise visiblement C. Par conséquent, tous les $X(p)$ $(p \in X^T)$ sont des ouverts affines de X, stables par C. $\square$

REMARQUE. Un peu plus loin dans la théorie, on peut montrer que les $X(\lambda, p)$ $(p \in X^T)$ ci-dessus sont en fait les cellules de la « décomposition de Bruhat » (voir [Bo] § 14 et [Sp] chap. 8). Les $X(p)$ $(p \in X^T)$ ne sont donc rien d'autre que les « grosses cellules » associées aux différents $B \in \mathbf{B}^T$.

RÉFÉRENCES

[Bo] BOREL, A. *Linear Algebraic Groups.* Second Enlarged Edition, Springer-Verlag (1991).

[B-B] BIAŁYNICKI-BIRULA, A. Some theorems on actions of algebraic groups. *Ann. of Math. 98* (1973), 480–497.

[Ch] CHEVALLEY, C. *Classification des groupes de Lie algébriques.* Séminaire de l'École Normale Supérieure, Paris, 1956–1958.

[Do] DOKOVIC, D. Z. An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups. *L'Enseignement Mathématique 34* (1988), 269–273.

[Sp] SPRINGER, T. A. *Linear Algebraic Groups.* Second Edition, Birkhäuser (1998).

(Reçu le 15 avril 1999)

D. Luna

Institut Fourier
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
France