

# 8.1 QUASI-FREE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

8.1  $\Pi$  QUASI-FREE

Let  $S, T$  be finite sets, and  $\bar{\cdot}$  an involution on  $S$ . Consider the two presentations

$$\begin{aligned}\Pi &= \langle S \mid s\bar{s} = 1 \ \forall s \in S \rangle, \\ \Pi &= \langle S \cup T \mid s\bar{s} = 1 \ \forall s \in S; t = 1 \ \forall t \in T \rangle.\end{aligned}$$

Let  $\Xi < \Pi$  be any subgroup, and let  $F'$  and  $G'$  be the generating series related to the first presentation. Clearly  $F' = F$ , as both series count the same objects in  $\Pi$  (regardless of  $\Pi$ 's presentation); while

$$G(t) = \frac{G' \left( \frac{t}{1 - |T|t} \right)}{1 - |T|t}.$$

Indeed any word  $w = w_1 \dots w_n$  in  $S \cup T$  defining an element of  $\Xi$  can be uniquely decomposed as  $w = t_0 s_1 t_1 \dots s_m t_m$ , where  $s_i \in S$ ,  $t_i$  are words in  $T$  for all  $i$ , and  $s_1 \dots s_m$  defines an element of  $\Xi$ ; moreover all choices of  $s_1 \dots s_m$  defining an element of  $\Xi$  and words  $t_i$  in  $T$  give a distinct word  $w$ . It then suffices to note that the generating series for any of the  $t_i$  is  $1/(1 - |T|t)$ .

Putting everything together, we obtain:

PROPOSITION 8.1. *Let  $\Pi$  be as above,  $\Xi < \Pi$  a subgroup. Then*

$$\frac{F(t)}{1 - t^2} = \frac{G \left( \frac{t}{1 + |T|t + (|S| - 1)t^2} \right)}{1 + |T|t + (|S| - 1)t^2}.$$

8.2  $\Pi = \mathbf{PSL}_2(\mathbf{Z})$ 

Let

$$\Pi = \mathbf{PSL}_2(\mathbf{Z}) = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle,$$

and let  $\Xi < \Pi$  be any subgroup. We take  $S = \{a, b, b^{-1}\}$ .

We suppose  $\Xi$  is torsion-free, i.e. contains no element of the form  $waw^{-1}$  or  $wb^{\pm 1}w^{-1}$ . Let  $\mathcal{X}$  be the Schreier graph of  $(\Pi, \{a, b, b^{-1}\})$  relative to  $\Xi$ , as defined in Subsection 3.1; it is a trivalent graph whose vertex set is  $\Xi \backslash \Pi$ . Its vertices can be grouped in triples  $w^\Delta = \{w, wb, wb^{-1}\}$  connected in triangles. Let  $\mathcal{F}$  be the graph obtained from  $\mathcal{X}$  by identifying each triple to a vertex. Explicitly,