1.2 Graphes et puzzles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1.2 Graphes et puzzles

Définition 1.6. Soit $f\colon X' \to X$ une application à allure rationnelle simple. On dit qu'un graphe Γ (formé d'arêtes – arcs de $\widehat{\mathbf{C}}$ – et de sommets – points de $\widehat{\mathbf{C}}$) est *admissible* s'il vérifie les conditions suivantes :

- Γ est un graphe connexe fini inclus dans $\overline{X}$ et contenant ∂X ;
- Γ est *stable* au sens où $f^{-1}(\Gamma)$ contient $\Gamma \cap X'$;
- l'orbite positive du point critique ne rencontre pas Γ.

Des exemples de tels graphes seront construits par la suite.

Étant donné un graphe admissible Γ pour $f\colon X' \to X$, on appelle *pièce de profondeur n, $n \geq 0$*, toute composante connexe de l'ouvert $f^{-n}(X \setminus \Gamma) = f^{-n}(X) \setminus f^{-n}(\Gamma)$. Le *puzzle* associé à (X', X, f, Γ) est la collection de toutes ces pièces.

Les pièces de profondeur n donnée sont ainsi des ouverts disjoints et tout point x de $f^{-n}(X \setminus \Gamma)$ se trouve dans une unique pièce de profondeur n que l'on note $P_n(x)$.

Le bord des pièces de profondeur 0 est contenu dans Γ. Pour $n \geq 1$, le bord des pièces de profondeur n est contenu dans le graphe Γ_n où la suite Γ_n, $n \geq 0$, est définie comme suit :

$$\Gamma_0 = \Gamma, \quad \Gamma_1 = f^{-1}(\Gamma \cap X) \cup \partial X', \ \ldots, \quad \Gamma_{n+1} = f^{-n}(\Gamma_1), \quad n \geq 1.$$

Une pièce de profondeur n est donc aussi une composante connexe de $f^{-n}(X) \setminus \Gamma_n$.

Lemme 1.8. *Soit Γ un graphe admissible pour une application à allure rationnelle f de X' dans X.*

a) *Toute pièce de profondeur $n+1$ du puzzle associé à Γ est incluse dans une unique pièce de profondeur n.*

b) *Pour tout point x de $f^{-(n+1)}(X \setminus \Gamma)$, f induit une application de $P_{n+1}(x)$ sur $P_n\big(f(x)\big)$ qui, selon que $P_{n+1}(x)$ contient ou non l'éventuel point critique de f, est soit un revêtement double ramifié, soit un homéomorphisme.*

c) *Toutes les pièces du puzzle sont simplement connexes.*

Preuve. a) Cela provient de l'inclusion $X' \subset X$ et de la stabilité de Γ.

b) Comme les pièces de profondeur n sont les composantes connexes de $f^{-n}(X \setminus \Gamma)$, chaque image $f\big(P_{n+1}(x)\big)$ est contenue dans $P_n\big(f(x)\big)$. De plus, comme f est ouverte, le bord de $f\big(P_{n+1}(x)\big)$ est inclus dans $f\big(\partial P_{n+1}(x)\big)$, donc

dans $f(\Gamma_{n+1}) = \Gamma_n$. Ceci montre que l'application de $P_{n+1}(x)$ dans $P_n(f(x))$ induite par f est propre et est donc un revêtement ramifié. Si $P_{n+1}(x)$ ne contient pas le point critique, cette application est un homéomorphisme; sinon, c'est un revêtement double ramifié car le point critique est simple.

c) Comme le graphe Γ est connexe, les pièces de profondeur 0 sont simplement connexes. On procède ensuite par récurrence. Si P est une pièce de profondeur $n+1$, son image $f(P)$ est une pièce de profondeur n et est donc simplement connexe. Comme f induit un revêtement ramifié de P sur $f(P)$, la formule de Riemann-Hurwitz montre que P est simplement connexe. □

DÉFINITION 1.7. Si $x \in K(f)$ est un point dont l'orbite positive ne rencontre pas Γ, il est contenu dans une suite infinie et décroissante de pièces. On appelle *bout* de x cette suite

$$\big(P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots \supset P_n(x) \supset \cdots\big).$$

et *impression* de x l'intersection de ces pièces

$$\mathrm{Imp}(x) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(x).$$

Le lemme 1.8 montre que l'application f envoie naturellement le bout de x sur celui de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f\big(\big(P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots\big)\big) &= \big(f(P_1(x)) \supset f(P_2(x)) \supset \cdots\big) \\ &= \big(P_0(f(x)) \supset P_1(f(x)) \supset \cdots\big). \end{aligned}$$

En particulier, on dit qu'un bout est *périodique* par f s'il est égal à son image par f^k pour un $k > 0$.

1.3 Le théorème de Yoccoz

DÉFINITION 1.9. Étant donné un graphe admissible Γ pour une application à allure rationnelle simple f, on dit qu'un point x de $K(f)$ est *bagué* — à la profondeur n — si la condition suivante est satisfaite :

$$\bar{P}_{n+1}(x) \subset P_n(x).$$

On dit que x est *infiniment bagué* par Γ s'il est bagué à une infinité de profondeurs différentes.

Le théorème ci-dessous, dû à J.-C. Yoccoz, est un outil essentiel pour étudier la connexité locale des ensembles de Julia (voir [H, M2]). Il fait