# 1.4 Présentation des tableaux et de leurs propriétés

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

La proposition qui suit (version triviale du théorème de Yoccoz) règle le cas où le point critique $x_0$ n'est pas dans $K(f)$, moyennant un rétrécissement de $X'$. En outre elle donne une idée sur la manière dont on peut appliquer le lemme ci-dessus et utiliser la dynamique pour étudier la série $\sum_i \operatorname{mod} A_i(x)$.

PROPOSITION 1.14. *Soit $f\colon X' \to X$ une application à allure rationnelle n'ayant aucun point critique et soit $x$ un point de $K(f)$. Si un graphe admissible $\Gamma$ bague $x$ infiniment, l'impression* $\operatorname{Imp}(x)$ *est réduite au point $x$.*

*Preuve.* Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des anneaux de la forme $P_0 \setminus \bar{P}_1$, où $P_0$, $P_1$ sont des pièces du puzzle de profondeurs respectives $0$ et $1$. Comme le graphe $\Gamma$ est fini, $\mathcal{A}$ est un ensemble fini. Par ailleurs, comme $f$ n'a aucun point critique, $f^i$ induit, pour tout $i \geq 0$, un homéomorphisme conforme de l'anneau $A_i(x)$ sur un anneau élément de $\mathcal{A}$. Il en résulte d'une part qu'il existe une infinité d'entiers $i$ pour lesquels les images $f^i\big(A_i(x)\big)$ sont égales à un même anneau $A \in \mathcal{A}$, d'autre part que ces anneaux $A_i(x)$ ont tous le même module que $A$. Par suite, la série $\sum_i \operatorname{mod} A_i(x)$ diverge et le lemme 1.13 en tire la conclusion. $\square$

Cette preuve s'effondre évidemment dès que $f$ a un point critique $x_0$ dans $K(f)$. Quand $P_i(x)$ contient $x_0$, on peut seulement minorer le module de $A_i(x)$ par $(1/2)\operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(x)\big)$ (voir le lemme 1.17). La comparaison de $\operatorname{mod} A_i(x)$ avec le module des anneaux de profondeur $0$ dépend alors du nombre d'images itérées de $P_i(x)$ qui contiennent $x_0$ et, en fin de compte, de la récurrence du point critique $x_0$. Si celle-ci n'est pas trop forte, on peut encore trouver une infinité d'anneaux $A_i(x)$ ayant un même module. Sinon, une étude plus approfondie de la combinatoire est nécessaire.

## 1.4 PRÉSENTATION DES TABLEAUX ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Soit $\Gamma$ un graphe admissible pour une application à allure rationnelle simple $f\colon X' \to X$ et $x$ un point de $K(f)$ dont l'orbite positive évite $\Gamma$.

DÉFINITION 1.15. Le *tableau* $T(x)$ du point $x$ est la matrice de pièces, infinie vers la droite et le bas, dont la $j$-ième colonne, $j \geq 0$, donne en descendant les éléments du bout de $f^j(x)$. Autrement dit, l'élément de la $j$-ième colonne et $i$-ième ligne (en comptant vers le bas) est la pièce $T(x)_{i,j} = P_i\big(f^j(x)\big)$, $i,j \geq 0$.

Ainsi, pour tous $i \geq 1$, $j \geq 0$, l'inclusion $P_i\big(f^j(x)\big) \to P_{i-1}\big(f^j(x)\big)$

donne une flèche verticale montante sur $T(x)$, tandis que l'application $P_i\big(f^j(x)\big) \to P_{i-1}\big(f^{j+1}(x)\big)$ induite par $f$ fournit une flèche diagonale montante. En outre, toutes ces flèches commutent.

$$\begin{array}{ccccccc}
P_0(x) & & P_0\big(f(x)\big) & & P_0\big(f^2(x)\big) & & \cdots \\
i\uparrow & f\nearrow & i\uparrow & f\nearrow & i\uparrow & f\nearrow & \cdots \\
P_1(x) & \circlearrowleft & P_1\big(f(x)\big) & \circlearrowleft & P_1\big(f^2(x)\big) & \circlearrowleft & \cdots \\
i\uparrow & f\nearrow & i\uparrow & f\nearrow & i\uparrow & f\nearrow & \cdots \\
P_2(x) & \circlearrowleft & P_2\big(f(x)\big) & \circlearrowleft & P_2\big(f^2(x)\big) & \circlearrowleft & \cdots \\
\vdots & \iddots & \vdots & \iddots & \vdots & \iddots & \cdots \\
P_i(x) & \circlearrowleft & P_i\big(f(x)\big) & \circlearrowleft & P_i\big(f^2(x)\big) & \circlearrowleft & \cdots \\
i\uparrow & f\nearrow & i\uparrow & f\nearrow & i\uparrow & f\nearrow & \cdots \\
P_{i+1}(x) & \circlearrowleft & P_{i+1}\big(f(x)\big) & \circlearrowleft & P_{i+1}\big(f^2(x)\big) & \circlearrowleft & \cdots \\
\vdots & \iddots & \vdots & \iddots & \vdots & \iddots & \cdots
\end{array}$$

Les diagonales sud-ouest—nord-est (le long desquelles agit la dynamique $f$) seront appelées *diagonales du tableau* $T(x)$. On appellera aussi *double diagonale* toute paire de diagonales consécutives.

DÉFINITION 1.16. On appelle *anneau de profondeur $i$ du tableau $T(x)$* tout anneau, éventuellement dégénéré, de la forme $A_i(y) = P_i(y) \setminus \overline{P}_{i+1}(y)$, où $y$ est dans l'orbite positive de $x$.

Un tel anneau est dit *critique* (respectivement *non-critique*, respectivement *semi-critique*) si le point critique $x_0$ se trouve dans $P_{i+1}(y)$ (respectivement hors de $P_i(y)$, respectivement dans $P_i(y) \setminus P_{i+1}(y)$).

LEMME 1.17.

1) *Le caractère dégénéré ou non des anneaux du tableau est constant le long des doubles diagonales.*

2) *L'image par $f$ de l'anneau $A_i(y) = P_i(y) \setminus \overline{P}_{i+1}(y)$, $i > 0$, est l'anneau $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ si et seulement si l'anneau $A_i(y)$ n'est pas semi-critique.*

*Si $A_i(y)$ est critique (resp. non-critique), $f$ induit un revêtement double non ramifié (resp. un homéomorphisme) de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ et* $\operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(y)\big) = 2 \operatorname{mod} A_i(y)$ *(resp.* $= \operatorname{mod} A_i(y)$*).*

*Dans le cas où $A_i(y)$ est semi-critique, bien que $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ ne soit pas l'image $f\big(A_i(y)\big)$, on a la comparaison*

$$\operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(y)\big) \leq 2 \operatorname{mod} A_i(y)\,.$$

*Preuve.* 1) Si $A_i(y)$ est dégénéré, $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ l'est aussi. En effet, comme $f$ induit une application propre de $P_i(y)$ sur $P_{i-1}\big(f(y)\big)$, un point commun à $\partial P_i(y)$ et $\partial P_{i+1}(y)$ va sur un point commun à $\partial P_{i-1}\big(f(y)\big)$ et $\partial P_i\big(f(y)\big)$.

De plus, comme $f$ est ouverte, le bord de $P_i\big(f(y)\big) = f\big(P_{i+1}(y)\big)$ est entièrement inclus dans $P_{i-1}\big(f(y)\big) = f\big(P_i(y)\big)$. Par suite, si $A_i(y)$ n'est pas dégénéré, $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ ne l'est pas non plus.

2) D'après le lemme 1.8, pour tout entier $k > 0$, $f$ induit une application $f_k\colon P_k(y) \to P_{k-1}\big(f(y)\big)$ qui est soit un homéomorphisme soit un revêtement double ramifié.

i) Si $x_0$ est dans $P_{i+1}(y)$, les applications $f_i$ et $f_{i+1}$ sont des revêtements doubles ramifiés en $x_0$. Par suite, $f^{-1}\big(f\big(P_{i+1}(y)\big)\big) \cap P_i(y) = P_{i+1}(y)$ et l'anneau image $f\big(A_i(y)\big)$ coïncide donc avec $A_{i-1}\big(f(y)\big)$. De plus, $f$ induit un revêtement double non ramifié de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}\big(f(y)\big)$.

Si $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ est non dégénéré, l'anneau $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ est conforme à un anneau standard $A_{r^2}$ et l'application $f\colon A_i(y) \to A_{i-1}\big(f(y)\big) \simeq A_{r^2}$ se relève en un homéomorphisme conforme $A_i(y) \to A_r$ par le revêtement $A_r \to A_{r^2}$, $z \mapsto z^2$. Par suite, $\operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(y)\big) = -2\log r/(2\pi)$ et donc $\operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(y)\big) = 2 \operatorname{mod} A_i(y)$.

ii) Si $x_0$ n'est pas dans $P_i(y)$, les applications $f_i$ et $f_{i+1}$ sont des homéomorphismes conformes. Par suite, $f$ induit un homéomorphisme conforme de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ et $\operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(y)\big) = \operatorname{mod} A_i(y)$.

iii) Si $x_0$ est dans $P_i(y) \setminus P_{i+1}(y)$, l'application $f_i$ est un revêtement double ramifié tandis que $f_{i+1}$ est un homéomorphisme. Par suite, l'intersection $f^{-1}\big(f\big(P_{i+1}(y)\big)\big) \cap P_i(y)$ est formée de deux composantes connexes, $P_{i+1}(y)$ et une autre composante qu'on note $Q$. L'image $f\big(A_i(y)\big)$ contient alors $f(Q) = f\big(P_{i+1}(y)\big)$. Ainsi, $f\big(A_i(y)\big) = f\big(P_i(y)\big)$.

Pour comparer les modules, on choisit un homéomorphisme conforme de l'anneau $A_{i-1}\big(f(y)\big)$ sur un anneau standard $A_r$. On considère dans $A_r$ le cercle de rayon $R$ passant par le point correspondant à la valeur critique $f(x_0)$. Ramené dans l'anneau $A_{i-1}\big(f(y)\big)$, ce cercle donne une courbe de Jordan $\Gamma$ qui entoure $f\big(P_{i+1}(y)\big)$ et passe par la valeur critique $f(x_0)$. L'image réciproque de $\Gamma$ par $f$ est un huit que l'on décompose en ses boucles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ entourant respectivement $P_{i+1}(y)$ et $Q$ et se touchant au point critique. L'application $f$ envoie alors l'anneau $A$ compris entre $\partial P_i(y)$ et $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sur l'anneau compris entre $\partial P_{i-1}\big(f(y)\big)$ et $\Gamma$ avec un degré 2. Par suite, $\operatorname{mod} A = -\frac{1}{2}\frac{\log R}{2\pi}$. De plus, le disque bordé par $\Gamma_1$ et contenant $P_{i+1}(y)$ est conforme au disque bordé par $\Gamma$ et contenant $P_i\big(f(y)\big)$. Par suite, l'anneau $A'$ compris entre $\Gamma_1$

et $\partial P_{i+1}(y)$ est conforme à l'anneau compris entre $\Gamma$ et $\partial P_i\big(f(y)\big)$, donc $\operatorname{mod} A' = -\frac{\log(r/R)}{2\pi}$.

Finalement, les anneaux $A$ et $A'$ sont disjoints et homotopes à l'anneau $A_i(y)$, de sorte que l'inégalité de Grötzsch donne

$$\operatorname{mod} A_i(y) \geq -\frac{1}{2}\frac{\log R}{2\pi} - \frac{\log(r/R)}{2\pi} \geq -\frac{1}{2}\frac{\log r}{2\pi} = \tfrac{1}{2}\operatorname{mod} A_{i-1}\big(f(y)\big)\,.$$

□

LEMME 1.18. *Quelques propriétés du tableau $T(x)$.*

T1) *Si le terme $T(x)_{i,j}$ est critique (c'est-à-dire contient le point critique $x_0$), il en est de même de tous les termes situées au-dessus, i.e. du type $T(x)_{k,j}$ avec $k \leq i$.*

T2) *Si le terme $T(x)_{m,n}$ est critique, le triangle de $T(x)$ situé entre la verticale et la diagonale montantes issues de ce point est une copie du triangle de $T(x_0)$ situé entre la verticale et la diagonale montantes issues de $T(x_0)_{m,0}$ ; autrement dit,*

$$T(x)_{m-i,n+j} = T(x_0)_{m-i,j} \quad \textit{pour } 0 \leq j \leq i \leq m\,.$$

T3) *On suppose que $T(x)_{m,n}$ et $T(x)_{m-i,n+i}$, $i > 0$, sont deux termes critiques et que, sur la diagonale qui les joint, aucun terme entre eux n'est critique. Si l'anneau $A_m\big(f^n(x)\big)$ est semi-critique, il en est de même de l'anneau $A_{m-i}\big(f^{n+i}(x)\big)$ à condition que l'anneau $A_{m-i}\big(f^i(x_0)\big)$ — du tableau $T(x_0)$ — soit critique.*

Illustration de ces propriétés (les symboles $c$ et $\varnothing$ indiquent les pièces respectivement critiques et non-critiques).

$$\underbrace{\begin{array}{cccccc}
c & \cdots & \cdots & \cdots & c & \cdots \\
c & \cdots & \cdots & \varnothing & c & \cdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \varnothing & \cdots\cdots & \\
\vdots & \varnothing & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
c & \varnothing & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
c & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots &
\end{array}}_{\text{tableau critique}:\ T(x_0)}
\qquad
\underbrace{\begin{array}{cccccc}
\cdots & c & \cdots & \cdots & \cdots & c \\
\cdots & c & \cdots & \cdots & \varnothing & \varnothing \\
\cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \varnothing & \cdots \\
\cdots & \vdots & \varnothing & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
\cdots & c & \varnothing & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
\cdots & \varnothing & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots &
\end{array}}_{\text{tableau de } x:\ T(x)}$$

*Preuve.* T1) provient de l'inclusion $T(x)_{i,j} \subset T(x)_{k,j}$.

T2) provient de l'unicité de la pièce de profondeur $n$ contenant le point critique et de l'action diagonale de $f$.

T3) D'après T2) et T1), l'application $f^i$ induit des revêtements doubles ramifiés de $T(x_0)_{m,0}$ sur $T(x_0)_{m-i,i}$ et de $T(x_0)_{m+1,0}$ sur $T(x_0)_{m-i+1,i}$. Par suite, $T(x_0)_{m-i+1,i}$ a une seule préimage par $f^i$ dans $T(x_0)_{m,0}$, à savoir $T(x_0)_{m+1,0}$, ce qui empêche $T(x)_{m-i+1,n+i}$ d'être critique. $\square$

## 1.5 Réduction au cas d'un tableau critique récurrent persistant

Dans toute cette partie, on se place dans les hypothèses du théorème 1.10. En d'autres termes, *on suppose que le point critique $x_0$ est dans $K(f)$* (le cas $x_0 \notin K(f)$ est réglé par la proposition 1.14), *on se donne un point $x$ de $K(f)$ et un graphe admissible $\Gamma$ qui bague le point critique $x_0$ et bague infiniment le point $x$.*

En suivant le plan exposé à la fin de la partie 1.3, on cherche à évaluer le module des anneaux non dégénérés qui baguent $x$. Pour chaque anneau, l'estimation dépend du nombre d'images itérées qui sont critiques ou semi-critiques. Ceci conduit à utiliser la fonction $\tau$ de Yoccoz et à regarder le type de récurrence des tableaux.

Définition 1.19. On appelle *fonction $\tau$ de Yoccoz* la fonction de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N} \cup \{-1\}$ définie comme suit : pour tout entier $n \geq 0$, $\tau(n)$ est la profondeur du premier itéré (strict) de la pièce $P_n(x)$ qui contient le point critique $x_0$ ; si cet itéré n'existe pas, on pose $\tau(n) = -1$. Autrement dit, si $\Sigma(n)$ désigne l'ensemble

$$\Sigma(n) = \left\{ i \in [0, n-1] \mid x_0 \in P_i\big(f^{n-i}(x)\big) \right\}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

la fonction $\tau$ est donnée par

$$\tau(n) = \begin{cases} \sup \Sigma(n) & \text{si} \quad \Sigma(n) \neq \varnothing, \\ -1 & \text{si} \quad \Sigma(n) = \varnothing. \end{cases}$$

En particulier, $\tau(n) < n$ et, comme $P_{i+1}\big(f^{n-i}(x)\big)$ est contenu dans $P_i\big(f^{n-i}(x)\big)$ pour tout $i \geq 0$, $\tau(n+1) \leq \tau(n) + 1$.

Remarque 1.20. Sur le tableau $T(x)$, la valeur $\tau(n)$ se lit comme la profondeur de la première pièce critique qu'on rencontre strictement après $T(x)_{n,0}$ sur la diagonale issue de ce terme.

Si $x$ n'est autre que le point critique $x_0$, alors $\tau(n)$ est la profondeur du premier retour de $x_0$ dans une pièce du bout critique.