2.1 Un théorème de connexité locale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

dans $\mathrm{Imp}(x_0)$, les pièces critiques situées sur les colonnes $0, \ldots, n-1$ de $T(x)$ ont une profondeur bornée par un entier l. Par suite, pour tout $i \geq l$, l'application f^n induit un homéomorphisme conforme de $P_{i+n}(x)$ sur $P_i(x_0)$, donc un homéomorphisme de $\mathrm{Imp}(x)$ sur $\mathrm{Imp}(x_0)$.

On suppose à présent que l'orbite de x évite $\mathrm{Imp}(x_0)$, c'est-à-dire qu'aucune colonne de $T(x)$ n'est entièrement critique. On va montrer que, si $T(x)$ est récurrent, il est non persistant. Il suffit pour cela de construire une suite n_i sur laquelle τ est bornée.

Dans le tableau $T(x_0)$, entre les colonnes 0 et k, les positions critiques ont une profondeur majorée par l. Dans $T(x)$, on regarde la colonne de plus petit indice j où l'on trouve des positions critiques à une profondeur strictement supérieure à l et on note p la profondeur de la dernière position critique sur cette colonne. L'anneau $A_p\big(f^j(x)\big)$ est donc semi-critique. La propriété T3) assure alors que la diagonale issue de la position $(p+j+1, 0)$ dans $T(x)$ ne contient aucune pièce critique à une profondeur strictement supérieure à $l+1$. Ainsi, $\tau(p+j+1) \leq l+1$ et on pose $n_1 = p+j+1$. On continue en considérant la colonne de plus petit indice qui contient des positions critiques de profondeur strictement supérieure à p. On construit ainsi une suite n_i sur laquelle τ reste bornée par $l+1$. $\square$

§2 La pratique

2.1 Un théorème de connexité locale

On s'intéresse dans la suite aux polynômes de degré $d+1$, $d \geq 2$, dont l'un des points fixes dans $\mathbf{C}$ est un point critique de multiplicité $d-1$. Un tel polynôme est conjugué, par une transformation affine de $\mathbf{C}$, à un polynôme de la forme

$$(*) \qquad f(x) = a + \left(x + \frac{d+2}{d}a\right)(x-a)^d, \qquad x \in \mathbf{C},$$

où a désigne le point fixe critique de multiplicité $d-1$. Le point $-a$ est alors l'unique autre point critique et sera appelé (par contraste) *point critique libre*.

Le point a est un point fixe super-attractif. Son *bassin d'attraction* est l'ouvert

$$\widetilde{B}(a) = \left\{x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a\right\}$$

et son *bassin immédiat*, noté $B(a)$, est la composante connexe de $\widetilde{B}(a)$ qui contient a. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. *Le bord du bassin immédiat $B(a)$ est localement connexe. En fait, c'est une courbe de Jordan.*

REMARQUE 2.2. Le cas où $d = 2$ a été considéré par D. Faught dans sa thèse [Fa].

La démonstration du théorème, qu'on expose dans la suite, distingue deux cas.

Si le point critique libre $-a$ est dans $B(a)$ ou dans le bassin de l'infini

$$B(\infty) = \left\{ x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \right\},$$

le polynôme f est hyperbolique. La preuve s'appuie alors sur des arguments très classiques qu'on explique brièvement dans la partie 2.3.

Dans la suite, on considère donc un polynôme f de la forme $(*)$ pour lequel $-a$ n'est ni dans $B(a)$, ni dans $B(\infty)$. La démonstration se déroule en trois étapes. On donne d'abord une première description de la dynamique du polynôme f fondée sur des résultats classiques [M1]. On exploite ensuite cette description pour trouver un graphe admissible auquel on puisse appliquer le théorème 1.10. Si le bout critique n'est pas périodique, chaque impression est réduite à un point et il suffit alors de voir que l'adhérence de toute pièce a une intersection connexe avec le bord de $B(a)$ pour établir la connexité locale. Sinon, il reste une étape pour montrer que l'impression du point critique libre rencontre $\partial B(a)$ en un seul point.

2.2 ÉTUDE RAPIDE DE LA DYNAMIQUE

On observe tout d'abord que, comme $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, le bassin d'attraction $B(\infty)$ est connexe. Ensuite, le théorème de Böttcher [B] donne le résultat suivant (voir [M1, 17.3]):

PROPOSITION 2.3. *Si $-a$ est en dehors de $B(a)$ (resp. de $B(\infty)$), il existe une représentation conforme $\phi_a\colon \mathbf{D} \to B(a)$ (resp. $\phi\colon \mathbf{D} \to B(\infty)$) qui conjugue f à $z \mapsto z^d$ (resp. à $z \mapsto z^{d+1}$) et est unique à composition près dans $\mathbf{D}$ avec une rotation d'angle $2k\pi/(d-1)$ (resp. $2k\pi/d$).*