2.2 Étude rapide de la dynamique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

et son *bassin immédiat*, noté $B(a)$, est la composante connexe de $\widetilde{B}(a)$ qui contient a. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. *Le bord du bassin immédiat $B(a)$ est localement connexe. En fait, c'est une courbe de Jordan.*

REMARQUE 2.2. Le cas où $d = 2$ a été considéré par D. Faught dans sa thèse [Fa].

La démonstration du théorème, qu'on expose dans la suite, distingue deux cas.

Si le point critique libre $-a$ est dans $B(a)$ ou dans le bassin de l'infini

$$B(\infty) = \left\{ x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \right\},$$

le polynôme f est hyperbolique. La preuve s'appuie alors sur des arguments très classiques qu'on explique brièvement dans la partie 2.3.

Dans la suite, on considère donc un polynôme f de la forme $(*)$ pour lequel $-a$ n'est ni dans $B(a)$, ni dans $B(\infty)$. La démonstration se déroule en trois étapes. On donne d'abord une première description de la dynamique du polynôme f fondée sur des résultats classiques [M1]. On exploite ensuite cette description pour trouver un graphe admissible auquel on puisse appliquer le théorème 1.10. Si le bout critique n'est pas périodique, chaque impression est réduite à un point et il suffit alors de voir que l'adhérence de toute pièce a une intersection connexe avec le bord de $B(a)$ pour établir la connexité locale. Sinon, il reste une étape pour montrer que l'impression du point critique libre rencontre $\partial B(a)$ en un seul point.

2.2 ÉTUDE RAPIDE DE LA DYNAMIQUE

On observe tout d'abord que, comme $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, le bassin d'attraction $B(\infty)$ est connexe. Ensuite, le théorème de Böttcher [B] donne le résultat suivant (voir [M1, 17.3]):

PROPOSITION 2.3. *Si $-a$ est en dehors de $B(a)$ (resp. de $B(\infty)$), il existe une représentation conforme $\phi_a\colon \mathbf{D} \to B(a)$ (resp. $\phi\colon \mathbf{D} \to B(\infty)$) qui conjugue f à $z \mapsto z^d$ (resp. à $z \mapsto z^{d+1}$) et est unique à composition près dans $\mathbf{D}$ avec une rotation d'angle $2k\pi/(d-1)$ (resp. $2k\pi/d$).*

De telles représentations, lorsqu'elles existent, induisent des coordonnées polaires très utiles sur $B(a)$ et $B(\infty)$. On appelle ainsi :

- *rayon d'angle θ issu de a* l'ensemble
$$R_a(\theta) = \left\{\phi_a(r\,e^{2i\pi\theta}),\ r \in [0,1[\right\};$$
- *rayon externe d'angle θ* l'ensemble
$$R(\theta) = \left\{\phi(r\,e^{2i\pi\theta}),\ r \in [0,1[\right\};$$
- *équipotentielle de niveau v autour de a* la courbe
$$E_a(v) = \left\{\phi_a(r\,e^{2i\pi\theta}),\ \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\right\};$$
- *équipotentielle externe de niveau v* la courbe
$$E(v) = \left\{\phi(r\,e^{2i\pi\theta}),\ \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\right\}.$$

Les rayons sont des arcs sur lesquels la dynamique agit simplement : $f\big(R_a(\theta)\big) = R_a(d\theta)$ et $f\big(R(\theta)\big) = R\big((d+1)\,\theta\big)$. De plus, les rayons d'angles rationnels forment toujours des chemins d'accès à l'ensemble de Julia $J(f)$:

THÉORÈME 2.4 (Douady, Hubbard, Sullivan, Yoccoz).

a) *Pour tout $\theta \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, les rayons $R_a(\theta)$ et $R(\theta)$ aboutissent chacun en un point de l'ensemble de Julia, c'est-à-dire que les arcs $r \in [0,1[\mapsto \phi_a(r\,e^{2i\pi\theta})$ et $r \in [0,1[\mapsto \phi(r\,e^{2i\pi\theta})$ ont chacun une limite dans $J(f)$ lorsque r tend vers 1. De plus, chacune de ces limites (ou points d'aboutissement) est un point pré-périodique répulsif ou parabolique.*

b) *Tout point périodique répulsif ou parabolique de $J(f)$ est le point d'aboutissement d'au moins un rayon externe qui est périodique.*

On rappelle ici qu'un point p-périodique x de f est *parabolique* si $(f^p)'(x)$ est une racine de l'unité.

Esquisse de preuve. Pour une preuve complète, voir [M1, 18.1 et 18.2].

a) On traite le cas du rayon issu de a (l'autre est analogue). Comme θ est rationnel, $R_a(\theta)$ est pré-périodique par f et, quitte à changer θ en l'un de ses multiples, on peut supposer que $R_a(\theta)$ est fixe par un itéré f^k. On choisit un point $y_0 \in R_a(\theta)$ et on regarde la suite $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ de ses préimages successives par f^k sur $R_a(\theta)$. La distance hyperbolique $\mathrm{dist}_h(y_n, y_{n+1})$, dans $B(a) \setminus \{a\}$, est égale à $\mathrm{dist}_h(y_0, y_1)$. Comme la suite y_n s'accumule sur $\partial B(a)$, la distance euclidienne $\mathrm{dist}_e(y_n, y_{n+1})$ tend vers 0. De plus, comme $f^k(y_{n+1}) = y_n$, les valeurs d'adhérence de la suite y_n sont des points fixes

par f^k et sont donc en nombre fini. Par ailleurs, toute suite $y'_i \in R_a(\theta)$ est à distance hyperbolique bornée d'une suite extraite y_{n_i} et ses valeurs d'adhérence sont donc aussi des points fixes de f^k. Comme l'accumulation du rayon est connexe, elle est réduite à un point.

b) La preuve est plus difficile et on n'en donne qu'une idée très succincte pour un point k-périodique répulsif x. D'après un théorème classique de G. Kœnigs, x possède un voisinage U sur lequel f est analytiquement conjuguée à l'application $z \mapsto \lambda z$ où $\lambda = (f^k)'(x)$. On voit facilement que chaque composante connexe V de $U \setminus K(f)$ est simplement connexe et le point délicat est de montrer qu'elle est périodique par f^k, *i.e.* que $f^{ki}(V) \supset V$ pour un certain entier i. On vérifie ensuite que l'anneau V/f^{ki} obtenu en quotientant V par la relation d'équivalence $x \sim f^{ki}(x)$, avec sa métrique hyperbolique, a une géodésique fermée et celle-ci se relève alors en le rayon externe cherché. □

Dans le bassin $B(a)$, on a en outre le résultat suivant qui, compte tenu du théorème de Carathéodory [C], montre que le bord $\partial B(a)$ est une courbe de Jordan dès qu'il est localement connexe :

LEMME 2.5. *Si deux rayons issus de a (d'angles rationnels ou non) aboutissent en un même point de $\partial B(a)$, ils sont égaux.*

Preuve. Sinon, les deux rayons forment, avec leur point d'aboutissement x, une courbe de Jordan qui borde un ouvert connexe borné U. Comme ∂U est inclus dans $\bar{B}(a)$ qui est compact et invariant par f, le principe du maximum assure que la famille f^n, $n \geq 0$, est bornée sur U et donc normale. Pour obtenir une contradiction, il suffit alors de montrer que U rencontre $J(f)$. Or, si ce n'est pas le cas, x est le seul point sur lequel peuvent s'accumuler les rayons $R_a(\theta)$ contenus dans U et, par suite, tous ces rayons convergent vers x. Les angles de ces rayons forment un intervalle de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et, comme la multiplication par deux est dilatante, on voit que tout rayon issu de a aboutit en x, ce qui est absurde. □

2.3 LE CAS HYPERBOLIQUE

On suppose ici que $-a$ se trouve soit dans $B(a)$, soit dans $B(\infty)$. On note $P(f)$ l'ensemble post-critique de f — *i.e.* l'adhérence des orbites positives de tous les points critiques de f — et on pose $U = \widehat{\mathbf{C}} \setminus P(f)$. Comme $P(f)$ contient au moins $-a$, a et ∞, le revêtement universel $\widetilde{U}$ de U est un disque — sauf si $a = 0$, auquel cas l'ensemble de Julia est exactement le cercle