2.4 Construction de graphes admissibles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\mathrm{dist}_U\big(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)\big) \leq C\lambda^{n_0-n},$$

ce qui entraîne la convergence uniforme voulue. $\square$

Si maintenant $-a$ est dans $B(a)$, alors $f^{-1}\big(B(a)\big) = B(a)$. Il en découle l'égalité $\partial B(a) = J(f) = \partial B(\infty)$. En effet, tout point x qui n'est pas dans $\bar{B}(a)$ a un voisinage V disjoint de $\bar{B}(a)$. Par suite, toutes ses images itérées $f^n(V)$ évitent $\bar{B}(a)$, ce qui montre que la famille $\{f^n\}$ est normale sur V, donc que x n'appartient pas à $J(f)$. On applique alors à une représentation de Böttcher $\phi\colon \mathbf{D} \to B(\infty)$ le même raisonnement que plus haut pour montrer que $\partial B(a)$ est une image continue du cercle.

Il reste à voir que $\partial B(a)$ est bien une courbe de Jordan. On distingue deux cas :

Si $-a$ est dans $B(\infty)$, la représentation conforme $\phi_a\colon \mathbf{D} \to B(a)$ est bien définie et le résultat découle alors du lemme 2.5.

Si $-a$ est dans $B(a)$, en conjuguant f par une transformation de Mœbius Φ qui échange a et ∞, on obtient un polynôme g qui possède un point fixe super-attractif $\Phi(\infty)$ et dont le bassin immédiat $(\Phi(B(\infty)))$ ne contient pas d'autres points critiques. Dans ce cas on a bien une représentation conforme du bassin immédiat à laquelle on peut alors appliquer le lemme 2.5.

2.4 Construction de graphes admissibles

On suppose désormais que le point critique libre $-a$ n'est ni dans $B(a)$ ni dans $B(\infty)$ et on regarde le polynôme f comme une application à allure rationnelle de X' dans X où

$$X = \mathbf{C} \setminus \Big(\phi_a\big((1/2)\overline{\mathbf{D}}\big) \cup \phi\big((1/2)\overline{\mathbf{D}}\big)\Big) \quad \text{et} \quad X' = f^{-1}(X).$$

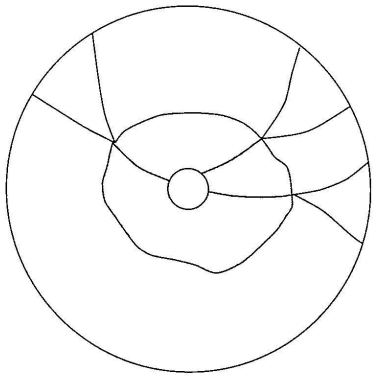

FIGURE 1

Le graphe $\Gamma(\theta)$ avec, en gris, le bassin immédiat $B(a)$ privé de $\phi_a\big((1/2)\mathbf{D}\big)$

Pour construire un graphe admissible, on observe d'abord que, pour tout $l \geq 1$, l'angle $\theta = 1/(d^l - 1)$ est, modulo 1, l-périodique par multiplication par d. D'après le théorème 2.4-a), le rayon $R_a(\theta)$ converge donc vers un point périodique x répulsif ou parabolique. En prenant l assez grand, on s'assure d'une part que l'orbite positive du point critique $-a$ est disjointe de celle de x et d'autre part que x est répulsif (en effet, f possède au plus une orbite périodique parabolique car tout orbite de ce type attire un point critique). Le théorème 2.4-b) fournit alors un rayon externe périodique $R(\eta)$ qui aboutit en x. Avec ces rayons, on forme*) le graphe admissible suivant:

$$\Gamma(\theta) = \partial X \cup \left(X \cap \left(\bigcup_{i \geq 0} \bar{R}_a(d^i\theta) \cup R\big((d+1)^i\eta\big) \right) \right).$$

Sur le cercle identifié à $[0,1]/(0 \sim 1)$, les angles $d^i\theta$, $0 \leq i \leq l-1$, sont rangés en ordre croissant. On va maintenant vérifier que le graphe $\Gamma(\theta)$ satisfait les hypothèses du théorème 1.10.

On distingue deux types de pièces de profondeur 0 découpées par $\Gamma(\theta)$, selon que leur bord est formé, en dehors de ∂X, de quatre rayons — deux dans $B(a)$, deux dans $B(\infty)$ — ou simplement de deux rayons externes. Comme on s'intéresse surtout aux pièces du premier type, on appellera *losange* tout ouvert de $\widehat{\mathbf{C}}$ dont la frontière est l'adhérence d'exactement quatre rayons d'angles rationnels dont deux sont dans $B(a)$ et les deux autres dans $B(\infty)$. Les propriétés suivantes sont immédiates:

1) tout losange rencontre $B(a) \setminus \{a\}$ suivant une partie stricte;
2) si U et V sont deux losanges tels que $\bar{U} \cap \bar{V} \cap B(a) = \{a\}$, alors $\bar{U} \cap \bar{V} = \{a, \infty\}$;
3) l'union de deux losanges qui s'intersectent est soit un losange, soit $\widehat{\mathbf{C}} \setminus \{a, \infty\}$;
4) si U et V sont deux losanges tels que $f(\partial U) = \partial V$, $f(U)$ rencontre $V \cap B(a)$ et si U intersecte $B(a)$ dans un secteur angulaire d'ouverture strictement inférieure à $1/d$ (*i.e.* si $\theta_1 < \theta_2$ sont les arguments des rayons de $\partial U \cap B(a)$ alors $\theta_2 - \theta_1 < 1/d$), alors $U \cap \bar{B}(a) \subset f^{-1}(V)$.

Pour le point 4), il suffit de voir que $U \cap B(a)$ ne coupe pas de préimages du bord de V. Ceci découle du fait que l'ouverture angulaire est trop petite pour intersecter $f^{-1}(\partial V) \cap B(a)$, puisque ∂U est déjà dans $f^{-1}(\partial V)$. Par suite, f envoie $U \cap B(a)$ dans $V \cap B(a)$, d'où l'affirmation.

---

*) Souvent, par abus de langage, on dira qu'un rayon fait partie de l'adhérence ou du bord d'une pièce si cet ensemble contient au moins deux points du rayon. D'autre part, par extension, on appellera encore rayon toute préimage itérée d'un rayon de $B(a)$.

On note $\Gamma_1(\theta)$ le graphe $f^{-1}\big(\Gamma(\theta)\big)$. Les rayons de $B(a)$ qui font partie de $\Gamma_1(\theta)\setminus\Gamma(\theta)$ ont pour angles les $d^i\theta+(j/d)$, $0\le i\le l-1$, $1\le j\le d-1$, qui sont tous dans l'intervalle du cercle contenant 0 et délimité par $\theta+(1/d)$ et θ/d (voir la figure 2). On se donne d'autre part un losange $U(\theta)$ qui contient $R_a(0)\setminus\{a\}$ et est bordé par $R_a(\theta+(1/d))$, $R_a(\theta/d)$ et deux rayons externes faisant partie de $\Gamma_1(\theta)$.

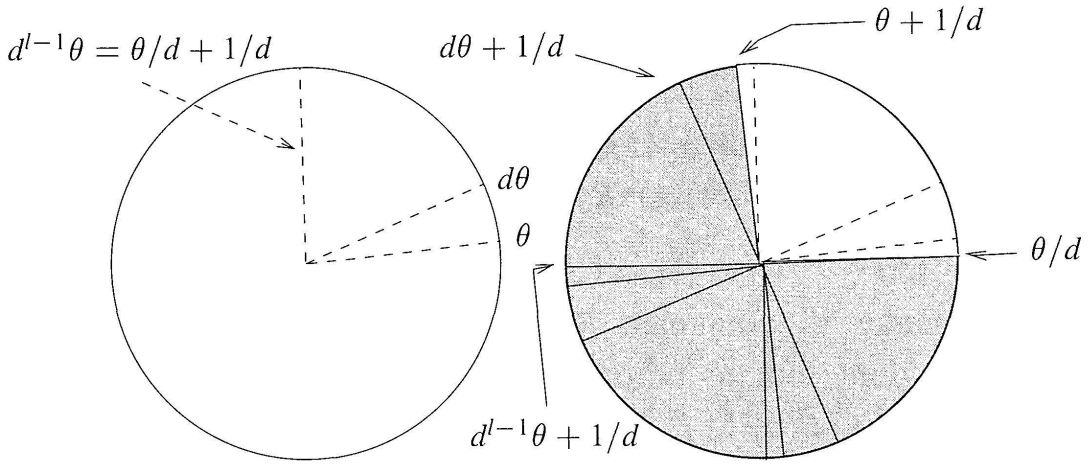

FIGURE 2

Le cas $d=4$, $l=3$ vu dans $\mathbf{D}$ via ϕ_a avec, en pointillés, $B(a)\cap\Gamma(\theta)$, en continu, $B(a)\cap\big(\Gamma_1(\theta)\setminus\Gamma(\theta)\big)$ et, en gris, $U(\theta)\cap B(a)$

LEMME 2.8. *Tout point de $J(f)\cap\big(U(\theta)\setminus\Gamma_1(\theta)\big)$ est bagué par $\Gamma(\theta)$ à la profondeur* 0.

Preuve. L'intersection $U(\theta)\cap X'$, qui est une union de pièces de profondeur 1, est relativement compacte dans la pièce de profondeur 0 qui rencontre $R_a(0)$ et qu'on note P_0 (voir la figure 2). En effet, P_0 est la trace sur X d'un losange $\widehat{P}_0$ bordé dans $B(a)$ par $R_a(\theta)$ et $R_a(\theta/d+1/d)$. Comme $1>\theta+1/d>\theta/d+1/d$ et $0<\theta/d<\theta$, l'intersection $\overline{U}(\theta)\cap(\mathbf{C}\setminus\widehat{P}_0)\cap B(a)$ est réduite à a. Par suite, $\overline{U}(\theta)$ et $\mathbf{C}\setminus\widehat{P}_0$ ne se touchent qu'en a — propriété 2) des losanges. Ainsi, $\overline{U}(\theta)\cap\overline{X}'\subset P_0$. $\square$

LEMME 2.9. *Soit $\theta=1/(d^l-1)$ et $\theta'=1/(d^{l'}-1)$ avec $l'>l+1$ et l assez grand. Tout point de $\partial B(a)$ est bagué à une profondeur bornée par l'un des graphes $\Gamma(\theta)$ ou $\Gamma(\theta')$.*

Preuve. On remarque tout d'abord que

$$\Big(\big(U(\theta)\setminus\Gamma_1(\theta)\big)\cup\big(U(\theta')\setminus\Gamma_1(\theta')\big)\Big)\cap X'=\big(U(\theta)\cup U(\theta')\big)\cap X'$$

car les graphes $\Gamma_1(\theta)$ et $\Gamma_1(\theta')$ sont disjoints dans X'. Par suite, il suffit de montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\bigcup_{0 \leq i \leq n} f^{-i}\big(U(\theta) \cup U(\theta')\big)$ contienne $\partial B(a)$.

L'ouvert $U(\theta) \cup U(\theta')$ est un losange que l'on note V_0, les rayons de $B(a)$ inclus dans ∂V_0 sont d'angles $\eta = \theta' + 1/d$, $\zeta = \theta/d$. On note n le plus petit entier tel que $\eta/d^n < \zeta$, on va construire, pour $0 \leq m \leq n$, un ouvert V_m ayant les propriétés suivantes :

- $V_m \cap \partial B(a)$ est inclus dans $\bigcup_{0 \leq i \leq m} f^{-i}(V_0)$;
- V_m, pour $m < n$, est un losange qui contient $R_a(1/d^m)$ et est bordé dans $B(a)$ par $R_a(\eta/d^m)$ et $R_a(\zeta)$;
- $V_n = \mathbf{C} \setminus \{a\}$.

Il existe un losange V_1' contenant $R_a(1/d)$ et bordé dans $B(a)$ par $R_a(\eta/d)$, $R_a(\zeta/d + 1/d)$, dont tout le bord est inclus dans $f^{-1}(\partial V_0)$. Alors, d'après la propriété 4), $V_1' \cap \bar{B}(a) \subset f^{-1}(V_0)$. Comme $\zeta/d + 1/d > \eta$, les losanges V_1' et V_0 s'intersectent et $V_1 = V_0 \cup V_1'$ est un losange ayant les propriétés demandées. On construit de même un losange V_m' pour tout $m \leq n$ et on pose $V_m = V_m' \cup V_{m-1}$. $\square$

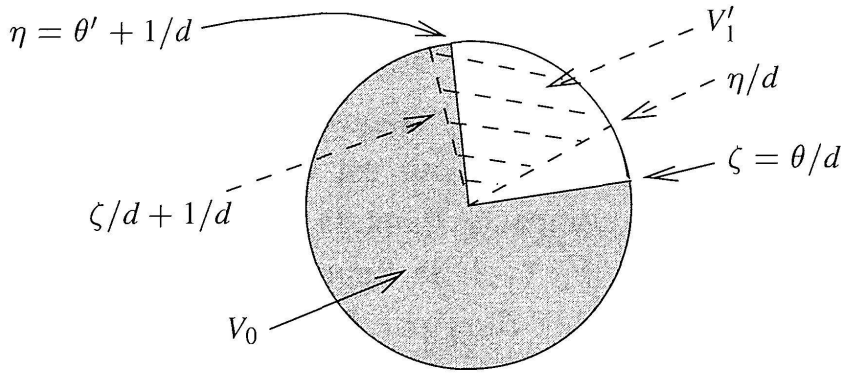

FIGURE 3

Illustration de la démonstration du lemme 2.9

REMARQUES.

a) Toutes les constructions précédentes et en particulier les lemmes 2.8 et 2.9 restent évidemment valables si on prend des graphes d'angle opposé *i.e.* d'angle $1 - \theta$ avec θ toujours de la forme $1/(d^l - 1)$.

b) La profondeur à laquelle on parvient à baguer les points de $\partial B(a)$ est bornée indépendamment du point considéré, mais croît avec l et l'. Ce fait est

insignifiant puisque l'on obtient finalement, d'après le lemme 1.12, que tout point de $\partial B(a)$ est infiniment bagué par un graphe $\Gamma(\theta)$ avec $\theta = 1/(d^l - 1)$ et l assez grand.

D'après la remarque b) précédente, il reste à baguer le point critique $-a$ (qui se trouve dans $K(f)$) et conclure par le théorème 1.10. On a le lemme suivant :

LEMME 2.10. *Il existe $l_0 \in \mathbf{N}$ et $\delta \in \{\pm 1\}$ dépendant uniquement de a tels que pour tout $l > l_0$, le point critique libre $-a$ est bagué à la profondeur 0 ou 1 par $\Gamma(\delta\theta)$ où θ est de la forme $1/(d^l - 1)$.*

On assimile dans cet énoncé $-\theta$ et $1 - \theta$.

Preuve. Pour $d > 2$, et l assez grand, l'ensemble $U(\theta)$ contient tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [1/2, 1]$ et $U(1-\theta)$ tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [0, 1/2]$. De ce fait, $U(\theta) \cup U(1-\theta)$ contient $B(a) \setminus \{a\}$; c'est donc $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ en vertu des propriétés 1) et 3) des losanges. De plus, comme les graphes sont admissibles (on prend l_0 grand dans ce but), $-a$ n'est sur aucun graphe de profondeur 1. Ceci résout le cas $d > 2$.

Pour $d = 2$, l'ouvert $U(\theta) \cup U(1-\theta)$ ne recouvre plus $B(a)$. Néanmoins, pour tout $l > -\log\varepsilon/\log d$ où ε est un rationnel petit, $U(\theta)$ contient tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [1/2+\varepsilon, 1]$ et $U(1-\theta)$ tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [0, 1/2-\varepsilon]$. On suppose donc désormais que le point critique $-a$ est dans un losange V bordé par $R_a(1/2+\varepsilon)$, $R_a(1/2-\varepsilon)$ et contenant $R_a(1/2)$. Pour voir que $-a$ est bagué à la profondeur 1, comme a priori il se peut que V contienne une partie d'une préimage de $B(a)$, on va montrer que la valeur critique $f(-a)$ est baguée à la profondeur 0 et plus précisément qu'elle se trouve dans $\mathbf{C} \setminus V \subset U(\theta) \cup U(1-\theta)$.

On suppose donc que $f(-a)$ est dans V, qui est un disque. Comme f est de degré 3 et que $-a$ est simple, $f^{-1}(V)$ est formé de deux disques et ceux-ci ne touchent pas $f^{-1}(\partial V)$. Or il y a deux losanges V_1, V_2 évidents qui ont leur bord inclus dans $f^{-1}(\partial V)$, contiennent respectivement $R_a(1/4)$, $R_a(3/4)$ et vérifient

$$R_a\left(\frac{1}{4} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \partial V_1 \quad \text{et} \quad R_a\left(\frac{3}{4} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \partial V_2 .$$

Par suite, les deux composantes de $f^{-1}(V)$ sont incluses dans $V_1 \cup V_2$ qui contient donc $-a$ et est disjoint de V. $\square$

En résumé, les lemmes 2.9, 2.10 et 1.12 garantissent que, pour tout point x de $\partial B(a)$, l'un des graphes $\Gamma(\theta)$, ou $\Gamma(1-\theta)$ bague infiniment x et bague le point critique $-a$. Le théorème de Yoccoz 1.10 et le lemme 2.11 ci-dessous assurent alors que $\partial B(a)$ est localement connexe en x ce qui achève la preuve du théorème 2.1, sauf dans la cas où le bout de $-a$ est périodique et si x tombe dans $\mathrm{Imp}(-a)$ par itération. C'est ce cas qu'il reste à étudier dans la partie suivante 2.5.

Pour trouver des voisinages connexes d'un point x de $\partial B(a)$, on va extraire de chaque intersection $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ un voisinage connexe de x dans $\partial B(a)$ qui est de la forme $\bigcap_{u \in]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau')$ avec $\tau, \tau' \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où

$$Q(u, \tau, \tau') = \left\{ \phi_a(r\, e^{2i\pi t}) \mid r \in]u, 1[,\ t \in]\tau, \tau'[\right\} .$$

LEMME 2.11. *Tout point x de $\partial B(a)$ dont l'impression $\bigcap_{n \geq 0} P_n(x)$ est réduite à x possède un système fondamental de voisinages connexes dans $\partial B(a)$.*

Preuve. Toute pièce de profondeur n rencontre $B(a)$ suivant des secteurs du type $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau')$ car son bord est formé, dans $B(a)$, (de morceaux) de rayons rationnels et de l'équipotentielle de niveau $2^{-1/d^n}$. Par ailleurs, comme x appartient à $P_n(x) \cap \partial B(a)$, il possède un voisinage dans $P_n(x)$ qui rencontre $B(a)$. Ce voisinage rencontre alors un secteur $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau') \subset P_n(x) \cap B(a)$ où $R_a(\tau)$, $R_a(\tau')$ font partie de $\partial P_n(x)$. Ainsi, l'intersection

$$U_n = \bigcap_{u \in]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau') \subset \bar{P}_n(x)$$

est un voisinage de x dans $\partial B(a)$, compact et connexe (c'est une intersection décroissante de parties compactes connexes). Comme l'intersection des pièces $P_n(x)$ se réduit au point x, la suite U_n constitue un système fondamental de voisinages connexes de x dans $\partial B(a)$. $\square$

2.5 CAS D'UN BOUT CRITIQUE PÉRIODIQUE

On considère à présent le graphe Γ parmi $\Gamma(\theta)$ et $\Gamma(1-\theta)$ qui bague le point critique libre $-a$ (à la profondeur 0 ou 1) et on suppose que le bout de $-a$ est k-périodique. D'après le théorème de Yoccoz 1.10, l'application $f^k \colon P_{m+k}(-a) \to P_m(-a)$ est à allure quadratique — pour un entier m assez grand — et son ensemble de Julia rempli K est l'impression $\mathrm{Imp}(-a) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(-a)$. Deux cas se présentent alors. Si $\bar{B}(a)$ n'intersecte pas K, la connexité locale de $\partial B(a)$ découle encore une fois du théorème de