Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PUZZLES DE YOCCOZ POUR LES APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE
Autor: ROESCH, Pascale
Kapitel: 2.5 Cas d'un bout critique périodique
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64443

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En résumé, les lemmes 2.9, 2.10 et 1.12 garantissent que, pour tout point x de $\partial B(a)$, l'un des graphes $\Gamma(\theta)$, ou $\Gamma(1-\theta)$ bague infiniment x et bague le point critique $-a$. Le théorème de Yoccoz 1.10 et le lemme 2.11 ci-dessous assurent alors que $\partial B(a)$ est localement connexe en x ce qui achève la preuve du théorème 2.1, sauf dans la cas où le bout de $-a$ est périodique et si x tombe dans $\mathrm{Imp}(-a)$ par itération. C'est ce cas qu'il reste à étudier dans la partie suivante 2.5.

Pour trouver des voisinages connexes d'un point x de $\partial B(a)$, on va extraire de chaque intersection $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ un voisinage connexe de x dans $\partial B(a)$ qui est de la forme $\bigcap_{u \in]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau')$ avec $\tau, \tau' \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où

$$Q(u, \tau, \tau') = \left\{ \phi_a(r\, e^{2i\pi t}) \mid r \in]u, 1[,\ t \in]\tau, \tau'[\right\} .$$

LEMME 2.11. *Tout point x de $\partial B(a)$ dont l'impression $\bigcap_{n \geq 0} P_n(x)$ est réduite à x possède un système fondamental de voisinages connexes dans $\partial B(a)$.*

Preuve. Toute pièce de profondeur n rencontre $B(a)$ suivant des secteurs du type $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau')$ car son bord est formé, dans $B(a)$, (de morceaux) de rayons rationnels et de l'équipotentielle de niveau $2^{-1/d^n}$. Par ailleurs, comme x appartient à $P_n(x) \cap \partial B(a)$, il possède un voisinage dans $P_n(x)$ qui rencontre $B(a)$. Ce voisinage rencontre alors un secteur $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau') \subset P_n(x) \cap B(a)$ où $R_a(\tau)$, $R_a(\tau')$ font partie de $\partial P_n(x)$. Ainsi, l'intersection

$$U_n = \bigcap_{u \in]0,1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau') \subset \bar{P}_n(x)$$

est un voisinage de x dans $\partial B(a)$, compact et connexe (c'est une intersection décroissante de parties compactes connexes). Comme l'intersection des pièces $P_n(x)$ se réduit au point x, la suite U_n constitue un système fondamental de voisinages connexes de x dans $\partial B(a)$. $\square$

2.5 CAS D'UN BOUT CRITIQUE PÉRIODIQUE

On considère à présent le graphe Γ parmi $\Gamma(\theta)$ et $\Gamma(1-\theta)$ qui bague le point critique libre $-a$ (à la profondeur 0 ou 1) et on suppose que le bout de $-a$ est k-périodique. D'après le théorème de Yoccoz 1.10, l'application $f^k \colon P_{m+k}(-a) \to P_m(-a)$ est à allure quadratique — pour un entier m assez grand — et son ensemble de Julia rempli K est l'impression $\mathrm{Imp}(-a) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(-a)$. Deux cas se présentent alors. Si $\bar{B}(a)$ n'intersecte pas K, la connexité locale de $\partial B(a)$ découle encore une fois du théorème de

Yoccoz 1.10 et du lemme 2.11, car aucun point de $\partial B(a)$ ne tombe dans K par itération et toutes les impressions sont donc réduites à des singletons. Sinon, on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point (lemme 2.13) qui est un point fixe par f^k noté β. Il en résulte que, si l'orbite d'un point $x \in \partial B(a)$ passe dans K, la suite des parties $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ forme, dans $\partial B(a)$, un système fondamental de voisinages de x puisque leur intersection est réduite à une préimage itérée de $\partial B(a) \cap K \subset \{\beta\}$. Le lemme 2.11 permet alors de conclure que $\partial B(a)$ est localement connexe en x. Ce qui achève la preuve du théorème 2.1.

Dorénavant, on suppose que $K \cap \partial B(a) \neq \varnothing$ et dans la fin de cet article on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point. Dans un premier temps, on trouve un point répulsif ou parabolique dans $K \cap \partial B(a)$:

LEMME 2.12. *Il existe dans $B(a)$ un rayon $R_a(\eta)$ qui est k-périodique par f et aboutit en un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ — fixe par f^k.*

Preuve. On reprend les notations données juste avant le lemme 2.11. On montre tout d'abord (par récurrence sur n) que, si une pièce P_n de profondeur n rencontre $B(a)$, l'intersection $P_n \cap B(a)$ est formée d'un seul secteur du type $Q(u, \tau, \tau')$, où l'intervalle $]\tau, \tau'[$ du cercle a une longueur strictement inférieure à $1/d^{n+1}$.

Une pièce P_0 de profondeur 0 a clairement cette propriété. D'autre part, toute pièce P_{n+1} de profondeur $n+1$ est contenue dans une pièce P'_n de profondeur n et a pour image par f une (autre) pièce P_n de profondeur n. Par hypothèse de récurrence, $P_n \cap B(a)$ est du type $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$, avec $|\tau'_n - \tau_n| < 1/d^{n+1}$. L'ouvert $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$ a donc d préimages dans $B(a)$, qui sont de la forme

$$Q\Big(u, \tau + \frac{i}{d}, \tau' + \frac{i}{d}\Big), \qquad 0 \leq i \leq d-1\,,$$

où $u = u_n^{1/d}$ et $|\tau' - \tau| < 1/d^{n+2}$. L'intersection $P_{n+1} \cap B(a)$ coïncide alors avec l'un de ces secteurs ouverts : elle en contient un tout entier car elle est bordée par des rayons préimages de ceux qui bordent P_n et elle ne peut en contenir deux car deux tels secteurs diffèrent de $1/d$ alors que la pièce $P'_n \supset P_{n+1}$ rencontre $B(a)$ dans un secteur d'ouverture $< 1/d$ (hypothèse de récurrence). On choisit alors τ, τ' pour que

$$P_{n+1} \cap B(a) = Q(u, \tau, \tau')\,.$$

Soit maintenant x un point de $K \cap \partial B(a)$. S'il se trouve sur une préimage Γ_n du graphe Γ, c'est immédiatement le point d'aboutissement d'un rayon

prépériodique de $B(a)$. En prenant son image par un itéré convenable de f, on obtient un rayon périodique qui converge vers un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ fixe par f^k. Si x n'est sur aucune préimage du graphe, la pièce $P_n(x)$ rencontre $B(a)$ suivant un secteur de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau'_n)$ avec $|\tau_n - \tau'_n| < 1/d^n$. Les angles (τ_n), (τ'_n) forment des suites adjacentes dont on note η la limite commune. Comme $x \in K \subset P_n(-a)$, nécessairement $P_n(x) = P_n(-a)$ et, de ce fait,

$$f^k\big(P_{n+k}(x) \cap B(a)\big) = P_n(x) \cap B(a)$$

pour n assez grand. Par suite, $d^k\eta$ est dans l'intervalle $]\tau_n, \tau'_n[\subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de sorte que $d^k\eta = \eta$. Le rayon d'angle η converge alors vers un point β (théorème 2.4). Ce point β est fixe par f^k et, comme il se trouve dans toutes les pièces $P_n(-a)$, il est dans $K \cap \partial B(a)$. $\square$

LEMME 2.13. *Il existe deux rayons externes $R(\zeta)$, $R(\zeta')$, d'angles ζ, ζ' rationnels, qui aboutissent au point β et sont tels que la courbe de Jordan $R(\zeta) \cup R(\zeta') \cup \{\beta\}$ sépare $K \setminus \{\beta\}$ de $\bar{B}(a) \setminus \{\beta\}$.*

Preuve. Dans la preuve du lemme 2.12, on a vu que $P_n(-a) \cap B(a)$ est de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau'_n)$. Les rayons $R_a(\tau_n)$, $R_a(\tau'_n)$ convergent vers des points y_n, y'_n de $\partial B(a)$ en lesquels aboutissent aussi des rayons externes qui font partie de $\partial P_n(-a)$ et qu'on note respectivement $R(\zeta_n)$, $R(\zeta'_n)$. La suite ζ_n (resp. ζ'_n) est alors croissante majorée (resp. décroissante minorée) et converge donc vers un angle limite ζ (resp. ζ'). De plus, comme f^k est un homéomorphisme local en les points y_n, y'_n et que $f^k\big(\bar{P}_{n+k}(-a)\big) = \bar{P}_n(-a)$ pour n assez grand,

$$f^k\big(R(\zeta_{n+k})\big) = R(\zeta_n), \quad \text{et} \quad f^k\big(R(\zeta'_{n+k})\big) = R(\zeta'_n).$$

Il en résulte que $(d+1)^k\zeta_{n+k} = \zeta_n$ (dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$) et, par suite, que ζ est périodique de période divisant k. Les rayons $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ convergent ainsi vers des points y, y' qui sont fixes par f^k et qui appartiennent à K — car la partie des rayons $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ située au-delà du potentiel $2^{-1/d^n}$ se trouve dans $\bar{P}_n(-a)$.

D'autre part, le théorème de redressement de A. Douady et J. H. Hubbard [DH2, théorème 1] montre que f^k est conjuguée à un polynôme quadratique $f_c(z) = z^2 + c$ par un homéomorphisme σ d'un voisinage de K sur un voisinage de l'ensemble de Julia rempli K_c de f_c. Les points $\sigma(\beta)$, $\sigma(y)$ et $\sigma(y')$ sont des points fixes de f_c en lesquels aboutissent des arcs externes fixes par f_c — à savoir $\sigma\big(R_a(\eta)\big)$, $\sigma\big(R(\zeta)\big)$ et $\sigma\big(R(\zeta')\big)$. Or un polynôme quadratique possède au plus deux points fixes parmi lesquels un seul — généralement

noté β_c — est l'aboutissement d'un arc externe fixe [P, théorème A]. Par suite, $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ convergent nécessairement vers β.

Finalement, $\bar{R}(\zeta)\cup\bar{R}(\zeta')$ forme une courbe de Jordan qui sépare $K\setminus\{\beta\}$ de $\bar{B}(a)\setminus\{\beta\}$. En effet, le losange V_n bordé par $\bar{R}_a(\tau_n)$, $\bar{R}_a(\tau_n')$, $\bar{R}(\zeta_n)$ et $\bar{R}(\zeta_n')$ contient la pièce $P_n(-a)$ par construction. Il contient donc K et, par suite, au moins un point périodique répulsif p (différent de β) et un rayon externe qui converge vers p, de sorte que $\zeta\neq\zeta'$. Ainsi, la composante connexe U de $\mathbf{C}\setminus\left(\bar{R}(\zeta)\cup\bar{R}(\zeta')\right)$ qui contient p contient $K\setminus\{\beta\}$ — car K ne peut rencontrer la courbe $\bar{R}(\zeta)\cup\bar{R}(\zeta')$ qu'en β et ce point ne disconnecte par K [M, théorème 6.10]. □

RÉFÉRENCES

[A] AHLFORS, L. V. *Lectures on Quasiconformal Mappings.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, California, 1987*).

[B] BÖTTCHER, L. Les lois principales de la convergence des itérés et leur application en analyse (en russe). *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch. 14* (1904), 155–234.

[BH] BRANNER, B. and J. H. HUBBARD The iteration of cubic polynomials II, patterns and parapatterns. *Acta Math. 169* (1992), 229–325.

[C] CARATHÉODORY, C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. *Math. Ann. 73* (1913), 323–370.

[DH1] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD *Étude dynamique des polynômes complexes.* Publ. math. d'Orsay, 1984.

[DH2] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. sci. École Norm. Sup. (4) 18* (1985), 287–343.

[F] FATOU, P. Sur les équations fonctionnelles (trois mémoires). *Bull. Soc. Math. France 47* (1919), 161–271, *48* (1920), 33–94 et 208–314.

[Fa] FAUGHT, D. Local connectivity in a family of cubic polynomials. Thèse de l'Université de Cornell, 1992.

[H] HUBBARD, J. H. Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz. In: *Topological Methods in Modern Mathematics*, L. R. Goldberg and A. V. Phillips eds, 467–511. Publish or Perish, Houston, 1993.

[J] JULIA, G. Mémoire sur l'itération des applications fonctionnelles. *J. Math. Pures Appl. 8* (1918), 47–245.

[M] MCMULLEN, C. *Complex Dynamics and Renormalization.* Annals of Mathematics Studies *135*. Princeton University Press, Princeton, 1994.

*) Réimpression du manuscrit *Lectures on Quasiconformal Mappings.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 10 D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.–New York–London, 1966.