2.3 Dirichlet L-functions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2.3 Dirichlet L-functions

For χ a Dirichlet character with conductor f_χ, the Dirichlet L-function for χ is defined by

$$L(s;\chi) = \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\chi(b)}{b^s},$$

for $s \in \mathbf{C}$ such that $\Re(s) > 1$. Note that $L(s;\chi)$ can be continued analytically to all of $\mathbf{C}$, except for a pole of order 1 at $s = 1$ when $\chi = 1$.

Let $\tau(\chi)$ be a Gauss sum,

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{f_\chi} \chi(a) e^{2\pi i a/f_\chi},$$

where $i^2 = -1$, and let

$$\delta_\chi = \begin{cases} 0, & \text{if } \chi(-1) = 1 \\ 1, & \text{if } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Then $L(s;\chi)$ satisfies the functional equation

$$(7)\quad \left(\frac{f_\chi}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta_\chi}{2}\right) L(s;\chi) = W_\chi \left(\frac{f_\chi}{\pi}\right)^{(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta_\chi}{2}\right) L(1-s;\overline{\chi}),$$

where $\Gamma(s)$ is the gamma function, and $W_\chi = \frac{\tau(\chi)}{i^{\delta_\chi}\cdot\sqrt{f_\chi}}$, having the property that $|W_\chi| = 1$. Since $\Gamma(s)$ has simple poles at the negative integers, $L(s;\chi)$ must be zero for $s = 1-n$, where $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$, such that $n \not\equiv \delta_\chi \pmod 2$, except when $\chi = 1$ and $n = 1$. $L(s;\chi)$ can also be described by means of the Euler product $L(s;\chi) = \prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \chi(p)p^{-s}\right)^{-1}$, for $s \in \mathbf{C}$ such that $\Re(s) > 1$. Thus $L(s;\chi) \neq 0$ in this domain.

The generalized Bernoulli numbers, $B_{n,\chi}$, and the Dirichlet L-function, $L(s;\chi)$, share the following relationship, a proof of this being found in [13]:

THEOREM 2.1. *Let χ be a Dirichlet character, and let $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$. Then $L(1-n;\chi) = -\frac{1}{n}B_{n,\chi}$.*

Thus we have a way to express certain values of a function defined in terms of an infinite sum as quantities that can be found by a finite process.