Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 325–338

ÉCHELLES DE SOBOLEV D'ORIGINE ARBITRAIRE

par Gérard BOURDAUD et Michał WOJCIECHOWSKI

RÉSUMÉ. A tout espace fonctionnel $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ est associée classiquement l'*échelle de Sobolev* $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$. La propriété $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ $((m,k) \in \mathbf{Z}^2)$ est connue pour être vraie si $E = L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ou si $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < \infty,\ n \geq 2)$. Nous montrons qu'elle est en défaut pour $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, en dimension $n \geq 2$. Plus précisément, nous établissons que E est un sous-espace propre de $W^1(W^{-1}(E))$, et $W^{-1}(W^1(E))$ un sous-espace propre de E.

ABSTRACT. *Sobolev scales with arbitrary origin.*
For every functional space $E \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, one considers classically the *Sobolev scale* $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$. The property $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$ $((m,k) \in \mathbf{Z}^2)$ is known to be true for $E = L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ or $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < \infty,\ n \geq 2)$. We show that it is false for $E = L^1(\mathbf{R}^n)$ and $E = L^\infty(\mathbf{R}^n)$, with $n \geq 2$. More precisely, we prove that E is a proper subspace of $W^1(W^{-1}(E))$, and $W^{-1}(W^1(E))$ a proper subspace of E.

1. INTRODUCTION

A tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ (ou de $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^n)$), on peut associer l'*échelle de Sobolev d'origine* E ; c'est la famille $\big(W^m(E)\big)_{m\in\mathbf{Z}}$ telle que :

$$W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E \quad (|\alpha| \leq m)\}, \tag{1}$$

$$W^{-m}(E) = \Big\{f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : \exists f_\alpha \in E, \quad f = \sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha^{(\alpha)}\Big\}, \tag{2}$$

pour tout $m \in \mathbf{N}$. Est-il vrai que n'importe lequel des $W^m(E)$ puisse être pris comme origine de l'échelle ? En d'autres termes, la propriété

$$\forall (m,k) \in \mathbf{Z}^2 \quad : \quad W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E)) \tag{3}$$

est-elle satisfaite par l'espace E ? La réponse est positive pour $E = L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p < +\infty)$; il suffit d'observer que