4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^\infty e^{-t}\langle f, \tau_{-t}g\rangle\, dt\,;$$

cela nous donne $E' = W^{-m}(W^m(E'))$; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir $E = W^m(W^{-m}(E))$ et $E' = W^m(W^{-m}(E'))$. Il nous reste à vérifier la propriété (5). Pour $m > k$, on applique la première partie de la preuve à l'espace $W^{m-k}(E)$, ainsi que la proposition 1 ; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}\left(W^k(W^{m-k}(E))\right) = W^{-k}(W^m(E))\,;$$

par ailleurs :

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}\left(W^k(W^{-k}(E))\right) = W^m(W^{-k}(E))\,.$$

Le cas $m < k$ se traite de manière analogue. Le même raisonnement s'applique à E'.

REMARQUE. Le théorème 3 se retrouve aussi dans le cadre des C_0-groupes ([1], théorème 3.3.23).

4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

4.1 LA PROPRIÉTÉ DE MITIAGIN-ORNSTEIN

DÉFINITION 3. Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On dit que E *possède la propriété de Mitiagin-Ornstein* si, pour toute distribution f, les conditions $\partial_j^k f \in E$ $(j = 1, 2\,;\ k = 0, 1, 2)$ impliquent $\partial_1\partial_2 f \in E$.

PROPOSITION 5. *Si E est un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, alors $W^1(E)$ possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.*

Preuve. Supposons $\partial_j^k f \in W^1(E)$, pour $j = 1, 2$ et $k = 0, 1, 2$. On a en particulier $\partial_2 f \in W^1(E)$, d'où $\partial_1\partial_2 f \in E$. La condition $\partial_1^2 f \in W^1(E)$ implique

$$\partial_1(\partial_1\partial_2 f) = \partial_2(\partial_1^2 f) \in E\,;$$

on obtient de même $\partial_2(\partial_1\partial_2 f) \in E$. Ainsi $\partial_1\partial_2 f$ appartient à $W^1(E)$.

4.2 Preuve du théorème 1

Nous procéderons en trois étapes.

1. Les espaces $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ne possèdent pas la propriété de Mitiagin-Ornstein (voir [5] et [6], ainsi que l'article de Boman [2]). D'après la proposition 5, cela suffit pour établir que $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ sont des sous-espaces propres de $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^2)))$ et $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$ respectivement.

2. Pour vérifier la propriété (i) en dimension $n \geq 3$, on considère

$$u \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^2)$$

et v une fonction non nulle appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-2})$. On voit aisément que la fonction $f = u \otimes v$ vérifie

$$f \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La propriété (iii) se prouve de la même façon.

3. On applique enfin le théorème 2 et la proposition 1, pour en déduire (ii) et (iv).

4.3 Contre-exemples explicites

Nous allons voir qu'il est possible de produire des contre-exemples pour les non-inclusions (i) et (ii) sans invoquer le théorème de Mitiagin. Il est clair qu'il suffit de travailler en dimension 2.

Soit

$$u(x,y) = 2x - x\log(x^2+y^2) - 2y\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

On a $u \in L^\infty_{loc}$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\log(x^2+y^2);$$

si on pose $f(x,y) = -\rho(x,y)\log(x^2+y^2)$, il vient

$$f = \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

de sorte que f appartient à $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Soient

$$v(x,y) = -2\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad w(x,y) = -\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\log(x^2+y^2).$$

Les fonctions v et w appartiennent à L^∞ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w - v\frac{\partial \rho}{\partial y},$$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Un calcul analogue montre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ appartient à $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Finalement f appartient à $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$ mais non à $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

Soit g une fonction intégrable positive telle que

$$\int_{\mathbf{R}^2} fg = +\infty,$$

par exemple $g(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2)\log^2(x^2+y^2)}$. Si l'on avait $g \in W^{-1}(W^1(L^1))$, la proposition 4 et le théorème 2 nous donneraient

$$|\langle g, \varphi_k * f\rangle| \leq \|\varphi_k * f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))}\, \|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))},$$

d'où

$$\int g\,(\varphi_k * f) \leq \|f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))} \|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))};$$

puisque $\varphi_k * f$ tend vers f presque partout, le lemme de Fatou nous conduirait à :

$$\int fg < +\infty,$$

ce qui contredit le choix de g.

4.4 Les plongements de Sobolev sous-jacents

La non-inclusion $L^1(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^2))\big)$ peut s'interpréter de manière fort élémentaire en la factorisant à travers des plongements de Sobolev. On commence par observer que

$$W^1(L^1(\mathbf{R}^2)) \subset L^2(\mathbf{R}^2) \tag{7}$$

(ceci parce que $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; voir par exemple [7], chapitre 5, théorème 2). On dispose en fait d'un plongement de Sobolev un peu plus général que (7), à savoir :

$$BV(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2);$$

$BV(\mathbf{R}^2)$ est l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont des mesures bornées sur $\mathbf{R}^2$. Dès lors l'inclusion

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^2))\big)$$

impliquerait *a fortiori*

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)\,,$$

ou encore, en passant aux duaux :

$$W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big) \subset L^\infty(\mathbf{R}^2)\,;$$

or $W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)$ est l'espace de Sobolev critique, qui s'injecte dans $BMO(\mathbf{R}^2)$ et non dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

5. Pour aller plus loin

Depuis les travaux de Stein et Weiss, l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{R}^n)$ et son dual $BMO(\mathbf{R}^n)$ sont considérés comme des substituts naturels de $L^1(\mathbf{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. $BMO(\mathbf{R}^n)$ n'est pas, à proprement parler, un EBD puisque, pour sa norme naturelle, c'est un espace de Banach de fonctions modulo les constantes. Aussi allons-nous considérer les *versions locales* de ces espaces fonctionnels, introduites par D. Goldberg [4] sous les notations $h^1(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n)$ et rattachés depuis à la grande famille des espaces de Lizorkin-Triebel; on a en effet $h^1(\mathbf{R}^n) = F^0_{12}(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n) = F^0_{\infty 2}(\mathbf{R}^n)$ (voir [8]). Puisque les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sont bornés sur les F^s_{pq}, on obtient $W^m(E) = (I-\Delta)^{-m/2}(E)$ pour $E = h^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = bmo(\mathbf{R}^n)$, de sorte que les échelles de Sobolev ayant ces deux espaces pour origine sont invariantes. Cela va nous conduire à une version précisée du théorème 1 :

Théorème 4. *Pour $n > 1$, on a :*

$$L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset W^1\big(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))\big) \subset bmo(\mathbf{R}^n)\,,$$

$$h^1(\mathbf{R}^n) \subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))\big) \subset L^1(\mathbf{R}^n)\,,$$

et ces quatre inclusions sont strictes.

Preuve. Compte tenu des théorèmes 1 et 2, il suffira d'établir que $h^1(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace propre de $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))$. Quelques rappels sur h^1 seront