4.2 Preuve du théorème 1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4.2 Preuve du théorème 1

Nous procéderons en trois étapes.

1. Les espaces $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ne possèdent pas la propriété de Mitiagin-Ornstein (voir [5] et [6], ainsi que l'article de Boman [2]). D'après la proposition 5, cela suffit pour établir que $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ sont des sous-espaces propres de $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^2)))$ et $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$ respectivement.

2. Pour vérifier la propriété (i) en dimension $n \geq 3$, on considère

$$u \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^2)$$

et v une fonction non nulle appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-2})$. On voit aisément que la fonction $f = u \otimes v$ vérifie

$$f \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La propriété (iii) se prouve de la même façon.

3. On applique enfin le théorème 2 et la proposition 1, pour en déduire (ii) et (iv).

4.3 Contre-exemples explicites

Nous allons voir qu'il est possible de produire des contre-exemples pour les non-inclusions (i) et (ii) sans invoquer le théorème de Mitiagin. Il est clair qu'il suffit de travailler en dimension 2.

Soit

$$u(x,y) = 2x - x\log(x^2+y^2) - 2y\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

On a $u \in L^\infty_{loc}$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\log(x^2+y^2);$$

si on pose $f(x,y) = -\rho(x,y)\log(x^2+y^2)$, il vient

$$f = \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

de sorte que f appartient à $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Soient

$$v(x,y) = -2\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad w(x,y) = -\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\log(x^2+y^2).$$