Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 385–389

THE SIXTH FERMAT NUMBER AND PALINDROMIC CONTINUED FRACTIONS

by Freeman DYSON

ABSTRACT. An elementary argument is presented, verifying the known factorization of the sixth Fermat number $2^{64}+1$. The verification is made more elegant by using an old theorem of Serret concerning palindromic continued fractions.

It is easy to explain why the fifth Fermat number $2^{32}+1$ is divisible by 641 [Hardy and Wright, 1938]. The prime 641 has the two representations

$$641 = 5 \cdot 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4. \tag{1}$$

The congruence

$$2^{32} = 2^4 \cdot 2^{28} \equiv -5^4 \cdot 2^{28} = -(5 \cdot 2^7)^4 \equiv -1 \pmod{641} \tag{2}$$

follows immediately from (1).

The purpose of this note is to explain in a similarly elementary way why the sixth Fermat number $2^{64}+1$ is divisible by 274177. The divisor has the representation

$$q = 274177 = 1 + 2^8 f\,, \qquad f = (2^6-1)(2^4+1)\,, \tag{3}$$

and it is easily verified that

$$2^{24} - 1 = fg\,, \qquad g = (2^6+1)(2^8-2^4+1)\,. \tag{4}$$

We look for a factorization of the form

$$2^{64}+1 = (x^2+y^2)(z^2+w^2)\,, \qquad 2^{32} - i = (x+iy)(z-iw)\,, \tag{5}$$

so that we require integers x, y, z, w satisfying

$$xz + yw = 2^{32}\,, \qquad xw - yz = 1\,, \qquad x^2+y^2 = q\,. \tag{6}$$

When $z = gx$, $w = gy$, the right side of (5), $(x+iy)g(x-iy)$, becomes gq; and $gq = 2^{32}+a$, very close to 2^{32}, with the difference $a = g - 2^8 = 15409$