2. Sur la topologie des cycles géodésiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Appliqué à $H = \{e\}$, le lemme principal redonne le fait (dû à Mal'cev [Ma]) que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ de type fini est résiduellement fini.

2. Sur la topologie des cycles géodésiques

Nous allons appliquer le lemme principal aux cycles géodésiques dans des variétés hyperboliques.

Définitions. *Variétés hyperboliques* (cf. [Th], [CEG] ou [Rat]). Soit $\mathbf{H}^n$ l'*espace hyperbolique*, i.e. l'unique variété riemannienne de dimension n simplement connexe, complète et de courbure constante égale à -1. Une *variété hyperbolique* (de dimension n) M est une variété riemannienne complète de courbure constante égale à -1. Une telle variété est isométrique au quotient $\mathbf{H}^n/\Gamma$ de l'espace hyperbolique par un *groupe kleinien*, *i.e.* un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$. Par commodité, toutes les variétés hyperboliques que nous considérerons seront supposées *orientées*. Alors, $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ où Γ est un groupe kleinien contenu dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$, le sous-groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbf{H}^n$. Rappelons que le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ s'identifie via le modèle de l'hyperboloïde au sous-groupe $\mathbf{PSO}(n,1)$ de $\mathrm{O}(n,1)$ (d'indice 4) constitué des matrices de déterminant 1 préservant la nappe supérieure de l'hyperboloïde. Étant donné un groupe kleinien, on notera $L(\Gamma)$ l'*ensemble limite* de Γ, *i.e.* la fermeture, dans la sphère à l'infini $\mathbf{S}^{n-1}_\infty$, de l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de Γ dans $\mathbf{H}^n$.

Théorème 1. *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

Remarque. Le théorème 1 était déjà connu en dimension deux [Sc] et en dimension trois [Lo].

Démonstration. Soit $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ une variété hyperbolique avec Γ un groupe kleinien de type fini. Soit $i_0 \colon F_0 \to M$ un cycle géodésique de dimension l. Soit $\widetilde{i_0} \colon \widetilde{F}_0 \to \mathbf{H}^n$ un relevé de i_0 au revêtement universel $\widetilde{F}_0$ de F_0 (que l'on suppose connexe). Puisque i_0 est une immersion localement totalement géodésique, il en est de même pour $\widetilde{i_0}$. L'application i_0 est propre donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F}_0)$ est complet dans $\mathbf{H}^n$. Donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F}_0)$ coïncide avec un sous-espace

totalement géodésique de dimension l dans $\mathbf{H}^n$. L'application $\widetilde{i_0}$ est alors un revêtement d'image simplement connexe donc un homéomorphisme sur son image. Et, quitte à conjuguer, on peut identifier le revêtement universel de F_0 avec le sous-espace $\mathbf{H}^l$ de $\mathbf{H}^n$. De plus, i_0 est injective au niveau des groupes fondamentaux; on note $\Lambda_0 = i_{0*}(\pi_1 F_0)$. On a alors

$$\Lambda_0 \subset \Gamma \cap \mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)\,,$$

où $\mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)$, le stabilisateur de $\mathbf{H}^l$ dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$, est égal à un sous-groupe d'indice fini du produit du groupe $\mathrm{O}(l,1)$ par un groupe de rotations compact que l'on note C. Soit $\Lambda = \Gamma \cap \mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)$. Montrons que la variété $F = \mathbf{H}^l/\Lambda$ (qui est finiment revêtue par F_0) se plonge dans un revêtement fini de la variété $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$. Soit i l'immersion canonique de F dans M. Soit D un domaine fondamental (compact) pour l'action de Λ sur $\mathbf{H}^l$. L'action de Γ sur $\mathbf{H}^n$ est propre. Donc l'ensemble

$$E = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D \cap D \neq \varnothing\}$$

est fini. En particulier $E - \Lambda$ est un sous-ensemble fini de Γ. Mais, d'après le lemme principal (appliqué à $H = \mathrm{O}(l,1) \times C$ et $\Gamma = \Gamma$),

$$\Lambda^* = \Lambda\,,$$

pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ. Donc, il existe un sous-groupe $\widehat{\Gamma}$ d'indice fini dans Γ qui contient Λ et tel que $E \cap \widehat{\Gamma} = E \cap \Lambda$. Alors, $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$ est un revêtement fini de M et contient F comme sous-variété plongée totalement géodésique. Or le plongement canonique $\widehat{i}$ de F dans $\widehat{M}$ relève i. Donc le cycle donné par i_0 se relève à $\widehat{M}$ en un cycle dont l'image égale à $\widehat{i}(F)$ est plongée. $\square$

REMARQUE. En remplaçant $\mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)$ par $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^l) \times C$ dans la démonstration du théorème 1, on peut montrer que sous les hypothèses du théorème 1 on peut relever le cycle en un cycle dont l'image est une sous-variété *orientée*.

THÉORÈME 2. *Tout cycle géodésique de codimension* 1 *dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont des sous-variétés plongées totalement géodésiques dont l'union est non séparante.*

Démonstration. Soit M une variété hyperbolique de volume fini de dimension n qui contient un cycle géodésique de dimension $n-1$. Le

groupe fondamental de M est de type fini. D'après le théorème 1, on peut donc supposer que M contient une sous-variété orientée plongée totalement géodésique $F = \mathbf{H}^{n-1}/\Lambda$ (i.e. que le cycle est d'image plongée dans M).

Montrons que quitte à passer à un revêtement fini de M, on peut supposer que F est non séparante (i.e. que le cycle se relève en un cycle non homologue à zéro). Supposons que F sépare M en M_+ et M_-. Le théorème de Van Kampen implique que le groupe fondamental Γ de M se décompose en un produit amalgamé

$$\Gamma = A *_\Lambda B,$$

où A (resp. B) est le groupe fondamental de M_+ (resp. M_-). Soient $a \in A$ et $b \in B$ deux éléments de Γ dont aucune puissance n'appartienne à Λ. Comme dans la démonstration du théorème 1, le lemme principal implique que le sous-groupe Λ est fermé pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ. Soit K un sous-groupe de Γ d'indice fini tel que K contienne Λ mais ne contienne ni a ni b. Soit $\widehat{\Gamma}$ l'intersection de tous les conjugués de K dans Γ. Alors, $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$ est un revêtement fini de M auquel la variété F se relève en une sous-variété non séparante.

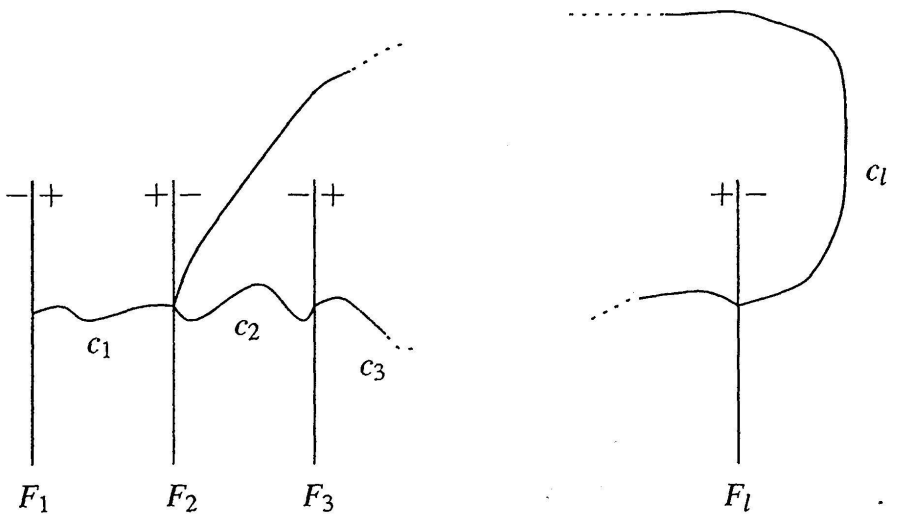

FIGURE 1

F_l est non séparante

En effet, soient α, β deux lacets dans M représentant respectivement a et b et basés en un point $x_0 \in F$. On construit par récurrence une famille finie de relevés de α et β : $\{c_1 = \widetilde{\alpha}_1, c_2 = \widetilde{\beta}_2, \ldots, c_l = \widetilde{\alpha}_l\}$ (ou $\{c_1 = \widetilde{\alpha}_1, c_2 = \widetilde{\beta}_2, \ldots, c_l = \widetilde{\beta}_l\}$) et l relevés disjoints de F : $F_1, \ldots, F_l$ ($l \in \mathbf{N}$) de manière à ce que c_i joigne F_i à F_{i+1} pour $i < l$ et c_l joigne F_l à F_{i_0} pour un certain $1 \leq i_0 \leq l$ (le revêtement est fini). Puisque ni α ni β

ne se relève, $i_0 < l$ et le lacet $c_{i_0} \cdot c_{i_0+1} \dots c_l$ a un degré d'intersection congru à 1 modulo 2 avec F_l. Dans la suite on suppose que F est non séparante dans M.

Concluons la démonstration du théorème 2. On a un morphisme canonique p de Γ sur $\mathbf{Z}$ dont le noyau contient Λ, le groupe fondamental de F : $0 \to (\Lambda \subset) \ker(p) \to \Gamma \to \mathbf{Z} \to 0$. Le noyau $\ker(p)$ de p est distingué dans Γ, donc son ensemble limite $L(\ker(p))$ coïncide avec celui de Γ : $\mathbf{S}^{n-1}_\infty = L(\Gamma)$. Mais puisque $\Lambda \subset \mathrm{Stab}(\mathbf{H}^{n-1})$, l'ensemble limite $L(\Lambda)$ de Λ est inclus dans $\mathbf{S}^{n-2}_\infty$, donc $\ker(p)$ contient un élément a de Γ dont aucune puissance n'appartient à Λ. Soit $b \in \Gamma$ tel que $p(b) = 1$; dans la suite on suppose que b peut être représenté par un lacet rencontrant F en un unique point. On applique le lemme principal pour obtenir l'existence d'un sous-groupe $\widetilde{\Gamma}$ de Γ d'indice fini ne contenant pas a. La variété $\widetilde{M} = \mathbf{H}^n/\widetilde{\Gamma}$ est un revêtement fini de M. Et la variété F admet deux relevés disjoints dans $\widetilde{M}$ dont l'union est non séparante. En effet, soient α un lacet dans M représentant a et β un lacet dans M représentant b et rencontrant F en un unique point. Soit c_1 un relevé de α allant d'un relevé F_1 de F à un relevé disjoint F_2 de F. On construit par récurrence des relevés $c_2, \dots, c_l$ de β et des relevés disjoints $F_3, \dots, F_l$ de F ($l \in \mathbf{N}$) de manière à ce que c_i soit un chemin allant de F_i à F_{i+1} pour $i < l$ et c_l un chemin de F_l à F_{i_0} avec $1 \leq i_0 \leq l$. Le lacet $c_{i_0} . c_{i_0+1} \dots c_l$ a un nombre d'intersection égal à 1 modulo 2 avec F_l et à 0 modulo 2 avec F_1. Donc $F_1 \cup F_l$ est non séparante dans $\widetilde{M}$. $\square$

COROLLAIRE. *Soit M une variété hyperbolique de volume fini contenant un cycle géodésique de codimension 1. Alors le groupe fondamental de M contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre de rang deux.*

Démonstration. Conservons les notations de la démonstration précédente. Alors, $\widetilde{\Gamma} \cong \pi_1 \widetilde{M}$ se surjecte sur un groupe libre de rang deux. En effet, soient $C_1 \cong F_1 \times [-1, 1]$ et $C_l \cong F_l \times [-1, 1]$ deux voisinages colliers de F_1 et F_l dans $\widetilde{M}$. On construit une application continue de $\widetilde{M}$ sur un bouquet de deux cercles en projetant tous les points de $M - (C_1 \cup C_l)$ sur le point base du bouquet et chaque intervalle $x \times [-1, 1]$ sur la première boucle lorsque $x \in F_1$ et sur la deuxième lorsque $x \in F_l$. Au niveau des groupes fondamentaux, cette application induit une surjection de $\widetilde{\Gamma}$ sur le groupe libre de rang deux. En particulier sous les hypothèses du théorème 2, M admet un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux.