1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 139–161

TOPOLOGIE DES COURBES ALGÉBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN

par Alexandre GABARD

RÉSUMÉ. On étudie la topologie des courbes algébriques réelles selon le *point de vue de Klein*, i.e. on s'intéresse au plongement de la partie réelle d'une courbe réelle dans sa complexifiée. Le résultat principal est une caractérisation des plongements possibles pour les courbes *planes*, obtenue en montrant qu'une restriction due à Rohlin est essentiellement la seule. Ce résultat répond à une question posée par Klein, puis par Gross et Harris.

1. INTRODUCTION

Une courbe algébrique projective complexe $C \subset \mathbf{P}^n$ lisse et irréductible est (pour la topologie transcendante) une surface connexe compacte orientable. Si de plus C est *réelle* (i.e. définie par des équations à coefficients réels) alors la conjugaison complexe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$, par le biais de son action sur $\mathbf{P}^n$ coordonnée par coordonnée, préserve globalement le lieu complexe C, en fixant point par point l'ensemble des points réels que l'on notera $C(\mathbf{R})$.

A la courbe réelle C est donc associée une *surface symétrique* (X, σ), c'est-à-dire une surface connexe compacte orientable X munie d'une involution continue σ qui *renverse l'orientation*.

Felix Klein disposait non seulement de la classification topologique des surfaces symétriques, mais savait aussi qu'elles sont toutes réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. Cela étant, Klein se demandait ce qu'il advient si l'on se restreint aux *courbes planes* (cf. [K3], p. 155, note en bas de page) ; de façon précise :

PROBLÈME DE KLEIN. *Caractériser les surfaces symétriques qui admettent un modèle comme l'action de Galois sur une courbe réelle lisse du plan.*

Ce problème fut reposé par Gross et Harris en 1981 (cf. [GrHa], p. 177). Il revient à étudier les plongements possibles de $C(\mathbf{R})$ dans une courbe plane C ; alors que le plongement de $C(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ est la spécificité du *16e problème de Hilbert*. Ce dernier est ouvert pour les degrés $d \geq 8$, et l'objet du présent exposé est de résoudre le *problème de Klein* pour tous les degrés.

L'exposé s'organise de la façon suivante :

- On commence par rappeler la classification topologique des surfaces symétriques en termes de trois invariants : le genre, le nombre de composantes fixes et l'alternative *séparante* ou non (la définition sera donnée au paragraphe suivant). Ensuite on va exhiber une *opération* qui permet de construire récursivement toutes les surfaces symétriques.
- Cette façon dynamique de penser aux surfaces symétriques va nous permettre de redémontrer le théorème de Klein : simplement en effectuant une « déformation » de courbes algébriques qui modélise l'opération topologique susmentionnée. Pour ce faire, on invoquera un résultat de l'école italienne dû à Brusotti, qui stipule que l'on peut « défaire » de façon indépendante les nœuds d'une courbe plane dont les seules singularités sont nodales. Cette preuve du théorème de Klein nous semble présenter l'avantage d'éviter tout transit superflu par les surfaces de Riemann : on préfère travailler directement sur leurs manifestations projectives.
- C'est alors seulement qu'on s'intéressera à la famille particularisée des courbes *planes* lisses, et ce en rappelant certains travaux de Rohlin, desquels résulte (entre autres) une restriction qui dit grosso modo qu'une courbe plane séparante possède beaucoup de composantes.
- Ensuite, quelques variations autour d'une méthode classique de Hilbert (originellement conçue pour la construction de courbes Harnack-maximales) vont nous permettre de construire des courbes planes qui réalisent tous les invariants non prohibés par Rohlin, obtenant ainsi une solution complète au problème de Klein.

2. La classification topologique des surfaces symétriques

On va d'abord classer les surfaces symétriques (X, σ) à *homéomorphisme équivariant* près (c'est la relation naturelle vu qu'un morphisme défini sur $\mathbf{R}$ entre variétés algébriques réelles est équivariant pour les actions de Galois). On note g le genre de X et r le nombre de composantes de $\mathrm{Fix}(\sigma)$, l'ensemble des points de X fixes par σ.