Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'HYPERBOLICITÉ DE CERTAINS COMPLÉMENTAIRES
Autor: Berteloot, François / Duval, Julien
Kapitel: 3. Linéarisation des courbes entières dans $(C*)^k$
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65437

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comme l'hyperbolicité est une propriété ouverte et stable par revêtement (cf. § 1), tout se réduit à montrer le

LEMME. *Le polyèdre*

$$X_1 = \{z,\ |z_i| = \|z\| \text{ pour au moins } k+1 \text{ coordonnées}\}$$

est hyperbolique.

Démonstration. Soit f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ une courbe entière contenue dans X_1. Elle doit «passer du temps» dans une de ses faces $X_I = \{z,\ |z_i| = \|z\|,\ i \in I\}$ où I est une partie de $\{1, \ldots, 2k+1\}$ de cardinal $k+1$. Par exemple, on peut supposer $f^{-1}(X_{\{1,\ldots,k+1\}})$ d'intérieur non vide. Autrement dit, si $f = [f_1 : \ldots : f_{2k+1}]$, on aura par prolongement analytique $|f_1| \equiv \cdots \equiv |f_{k+1}|$ sur tout $\mathbf{C}$. Comme l'image de f est contenue dans X_1 et que toute partie de $\{1, \ldots, 2k+1\}$ de cardinal $k+1$ rencontre $\{1, \ldots, k+1\}$, il s'ensuit que $\|f\| \equiv |f_1|$ sur tout $\mathbf{C}$. Donc, pour tout i, $|f_i|/|f_1|$ est bornée par 1 sur $\mathbf{C}$ et f est constante par le théorème de Liouville. $\square$

REMARQUE. La même démonstration s'applique au résultat de Babets [1] sur l'hyperbolicité de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $2k+1$ hypersurfaces en position générale.

3. LINÉARISATION DES COURBES ENTIÈRES DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

On décrit dans ce paragraphe les limites les plus simples des courbes entières dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $k+1$ hyperplans en position générale, donc dans $(\mathbf{C}^*)^k$.

DÉFINITION. Soit f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ une courbe entière non constante. Une *limite* de f est une courbe entière non constante g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ obtenue comme limite (uniforme sur les compacts de $\mathbf{C}$) de $(f \circ r_n)$ où (r_n) est une suite de reparamétrages à la source.

Les propriétés suivantes se vérifient facilement:

a) une limite d'une limite g de f en est encore une pour f;

b) si une courbe entière évite une hypersurface dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, ses limites évitent encore cette hypersurface ou y sont contenues.

THÉORÈME. *Soit* $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ *une courbe entière non constante évitant* $k+1$ *hyperplans en position générale qu'on choisit commme les hyperplans de coordonnées. Alors* f *possède une limite exponentielle non constante de la forme :*

$$g(z) = [c\, e^{\alpha z}] := [c_1\, e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_{k+1}\, e^{\alpha_{k+1} z}], \qquad c_i, \alpha_i \text{ dans } \mathbf{C}\,.$$

Démonstration. En voici le schéma : comme plus haut on extrait les racines n-ièmes $f^{1/n}$ de f que l'on reparamètre de sorte que $f^{1/n} \circ r_n$ converge vers ϕ entière non constante. L'idée est maintenant d'exploiter le fait que $(f \circ r_n)$ ne peut être normale car proche de (ϕ^n). On la renormalise près d'une intersection entre l'image de ϕ et le lieu de non-normalité des puissances n-ièmes pour créer la limite exponentielle voulue.

Plus précisément, notons Y ce lieu où la famille $(z \mapsto z^n)$ n'est pas normale. C'est un polyèdre constitué des faces

$$Y_{ij} = \{z,\ \ |z_i| = |z_j| \geq |z_l|, \text{ pour tout } l\}\,.$$

Son complémentaire consiste en $k+1$ polydisques ouverts

$$U_i = \{z,\ \ |z_i| > |z_l|,\ \ l \neq i\}\,.$$

Pour simplifier la discussion, supposons les composantes de ϕ distinctes en module. Remarquons que la courbe entière $\phi(\mathbf{C})$ rencontre Y ; en fait, la préimage $\phi^{-1}(Y)$ sépare $\mathbf{C}$, sinon la courbe serait entièrement contenue dans un des polydisques fermés $\overline{U}_i$ qui sont hyperboliques.

Comme $|\phi_i| \neq |\phi_j|$, on doit avoir $(\phi_i/\phi_j)' \neq 0$ sur $\phi^{-1}(Y_{ij})$ hors de points isolés. Autrement dit, la courbe $\phi(\mathbf{C})$ est transverse à toutes les faces de Y en une intersection générique.

On se place au voisinage Δ d'un tel point générique dans $\phi^{-1}(Y)$, par exemple 0 après translation. Son image $\phi(\Delta)$ est transverse à Y. Il en est de même avant la limite pour $f_n(\Delta)$ où $f_n = f^{1/n} \circ r_n$. On peut donc supposer après translation que $f_n(0)$ est dans Y, par exemple dans le bord du polydisque unité $U = U_{k+1}$ de la carte $(z_{k+1} = 1)$, et que sa puissance n-ième converge vers c, quitte à extraire.

Relevons ϕ et f_n dans cette carte via l'exponentielle en posant $\phi = e^{\psi}$ et $f_n = e^{\psi_n}$ où ψ_n converge vers ψ. Ainsi ψ_n' converge vers ψ', puis $n(\psi_n(z/n) - \psi_n(0))$ vers αz localement uniformément, où $\alpha = \psi'(0)$.

Donc $f \circ r_n(z/n) = (f_n)^n(0) e^{n(\psi_n(z/n) - \psi_n(0))}$ tend vers la limite voulue $g(z) = ce^{\alpha z}$. Celle-ci n'est pas constante : en effet $\phi(0)$ est dans l'une des faces du bord de U par exemple Y_{1k+1}. La transversalité de la courbe $\phi(\mathbf{C})$ à cette face se traduit par $\phi_1'(0) \neq 0$ d'où $\alpha_1 \neq 0$.

Le cas général se discute de manière analogue en groupant les composantes de ϕ identiques en module. Ainsi on ne retiendra par exemple de Y que les faces Y_{ij} pour $|\phi_i| \not\equiv |\phi_j|$. $\square$

REMARQUES.

1) On peut supposer de plus α réel dans la limite exponentielle g. Si ce n'est pas le cas, voici comment construire une limite de g (et donc de f) satisfaisant cette propriété: considérons l'enveloppe convexe des α_i significatifs (ceux correspondant à des coefficients $c_i \neq 0$) dans l'écriture de g; quitte à reparamétrer g, on suppose cette enveloppe contenue dans le demi-plan supérieur avec une arête réelle: par exemple α_i réel pour $i \leq p$ et $Im(\alpha_i) > 0$ pour $i > p$; de $g(z + in) = [e^{i\alpha n} c e^{\alpha z}]$ on extrait une sous-suite convergeant vers $h(z) = [c_1 e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_p e^{\alpha_p z} : 0 : \ldots : 0]$ qui convient.

2) Ce théorème contient celui de Green: en effet, soit $f(\mathbf{C})$ une courbe entière non constante dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ omettant $2k+1$ hyperplans en position générale, d'équations $(l_i = 0)$. En considérant $\Phi = [l_1 : \ldots : l_{2k+1}]$ le plongement correspondant dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$, la courbe entière $\Phi \circ f$ évite maintenant les hyperplans de coordonnées. Elle possède une limite de la forme suivante, quitte à permuter et prendre des multiples des formes linéaires l_i:

$$g(z) = [e^{\alpha_1 z} : \ldots : e^{\alpha_q z} : 0 : \ldots : 0] \text{ avec } \alpha_i = \alpha_1 \text{ ssi } i \leq p\,.$$

Par position générale, chacune des formes linéaires l_i est toujours combinaison de $k+1$ autres; il en est donc de même pour les composantes de Φ. Ceci entraine que $p \leq k$: sinon toute composante de g serait proportionnelle à $e^{\alpha_1 z}$ et g serait constante. Mais, d'un autre côté, la première composante de g doit être combinaison des $k+1$ dernières, soit:

$$e^{\alpha_1 z} = \sum_{i \geq k+1} \lambda_i e^{\alpha_i z}\,.$$

Or on a dans cette égalité $\alpha_i \neq \alpha_1$ puisque $p \leq k$. C'est impossible.

4. COMPLÉMENTAIRE D'UNE COURBE À TROIS COMPOSANTES DANS $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

Nous appliquons ce qui précède à l'étude de l'hyperbolicité du complémentaire de trois courbes dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (comparer avec [5], [6]).