# 5. Appendice. Courbes de Brody dans $(C*)^k$

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

REMARQUE. On construit facilement des exemples de courbes $C$ à trois composantes de degré 5 dont le complémentaire n'est pas hyperbolique à cause d'une droite ne coupant $C$ qu'en 2 points. En voici deux, présentés en coordonnées affines, où l'obstruction $\Gamma$ est une conique ou une cubique rationnelle ne rencontrant $C$ qu'en 2 points.

a) $C$ est l'union des deux paraboles d'équation $(\pm 2x = y^2 - 2)$ et de l'axe des $x$. Le cercle $\Gamma$ d'équation $(x^2 + y^2 = 1)$ a des contacts d'ordre 4 avec les paraboles en leurs sommets situés sur l'axe des $x$.

b) $C$ est l'union de la cubique d'équation $(y^3 = x^3 + x)$, de l'axe des $x$ et de la droite à l'infini. La cubique rationnelle $\Gamma$ d'équation $(x = y^3)$ a son point de rebroussement à l'infini au point de rencontre des deux droites et un contact d'ordre 9 avec la cubique de $C$ en l'origine, également sur l'axe des $x$.

## 5. APPENDICE. COURBES DE BRODY DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

Le théorème du paragraphe 3 est aussi conséquence de la description des courbes de Brody dans $(\mathbf{C}^*)^k$.

DÉFINITION. Une courbe entière $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ est dite *de Brody* si $\|f'\| \leq 1$, la dérivée étant mesurée dans les métriques usuelles de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$.

Toute courbe entière possède une limite de Brody, précisément par le lemme de Brody (cf. § 1). Celles contenues dans $(\mathbf{C}^*)^k$ sont très simples :

THÉORÈME. *Les seules courbes de Brody $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ évitant les hyperplans de coordonnées sont de la forme*

$$f(z) = [ce^{\alpha z}] := [c_1 e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_{k+1} e^{\alpha_{k+1} z}], \quad c_i, \alpha_i \text{ dans } \mathbf{C}.$$

*Démonstration.* Écrivons $f = e^{\phi}$ dans une carte de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, par exemple $(z_{k+1} = 1)$.

La première étape, classique (voir [5]), montre que les composantes de $\phi$ sont quadratiques. L'argument remonte aux origines de la théorie de Nevanlinna. La propriété d'être de Brody pour $f$ se traduit directement par la surharmonicité de $\mathrm{Log}(1 + |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2) - |z|^2$. Les moyennes de $\mathrm{Log}(1 + |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2)$ sur les cercles de centre 0 et de rayon $r$

croissent ainsi au plus quadratiquement en $r$. Il en est de même pour celles de $\mathrm{Log}(1+|f_j|^2)$, donc de $\mathrm{Log}(|f_j|+|f_j|^{-1})$ puisque $\mathrm{Log}\,|f_j| = \mathrm{Re}(\phi_j)$ est harmonique. Or le développement en série entière de $\phi_j$ donne:

$$\pi r^n\, \phi_j^{(n)}(0) = n! \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,\phi_j(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta\,,$$

d'où

$$\pi r^n\, |\phi_j^{(n)}(0)| \leq n! \int_0^{2\pi} |\mathrm{Log}\,|f_j(re^{i\theta})||\, d\theta \leq n! \int_0^{2\pi} (\mathrm{Log}(|f_j|+|f_j|^{-1}))(re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

En faisant croître indéfiniment $r$, on en déduit que $\phi_j^{(n)}(0) = 0$ pour $n \geq 3$. Les composantes de $\phi$ sont bien quadratiques.

La deuxième étape consiste à voir que les composantes de $\phi$ sont en fait affines. Pour cela, revenons aux coordonnées homogènes:

$$f = [e^{\phi_1} : \ldots : e^{\phi_{k+1}}] \text{ avec } \deg(\phi_i) \leq 2\,.$$

Il s'agit de montrer que $\phi_i - \phi_j$ est affine pour toute paire d'indices. Convenons que $i$ équivaut à $j$ si c'est le cas pour la paire $\{i,j\}$. La remarque cruciale est la suivante:

*Soit $Y_{ij} = \{z \mid |z_i| = |z_j| \geq |z_l| \text{ pour tout } l\}$ (cf. §3). Si $f^{-1}(Y_{ij})$ n'est pas compact, alors $i$ équivaut à $j$.*

En effet, on peut alors trouver $a_n$ tendant vers l'infini avec $f(a_n)$ tendant vers $b$ dans $Y_{ij}$. Quitte à extraire, on peut supposer la suite $(f(z+a_n))$ localement uniformément convergente par le théorème d'Ascoli puisque la dérivée de $f$ est uniformément bornée. Il en est de même pour la suite des dérivées en 0 de la $i$-ième composante de $(f(z+a_n))$ dans la carte $(z_j = 1)$, donc

$$(f_i/f_j)'(a_n) = (\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n))((f_i/f_j)(a_n))$$

converge.

Or $(f_i/f_j)(a_n)$ tend vers $b_i/b_j \neq 0$. Ainsi $\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n)$ doit converger alors que $\phi_i' - \phi_j'$ est affine et que $a_n$ tend vers l'infini. Ceci force $\phi_i' - \phi_j'$ à être constant et $i$ équivaut à $j$.

Cette remarque permet de conclure: en effet, elle entraîne que le maximum des modules des composantes de $f$ est réalisé par des composantes d'indices équivalents (par exemple à 1) hors d'un compact de $\mathbf{C}$. On aura ainsi, pour tout $i$:

$$\mathrm{Re}(\phi_i)(z) \leq \mathrm{Re}(\phi_1)(z) + O(|z|)\,.$$

Donc $\phi_i - \phi_1$ est affine pour tout $i$. $\square$