Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Autor: Louvet, Nicolas
Kapitel: 2. Exemples
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65439

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ a un premier groupe de cohomologie non nul mais son support contient π_2 et n'est donc pas contenu dans le cortex.

Le cortex est un sous-ensemble fermé de $\widehat{G}$. Nous avons préféré ici la définition du cortex présentée dans [BeKa] à celle donnée dans [VeKa]. Avec la définition choisie, 1_G appartient toujours au cortex. Nous donnons au §2 des exemples de groupes pour lesquels nous décrivons brièvement la 1-cohomologie des représentations irréductibles ainsi que le cortex. Pour des études détaillées du cortex de certains groupes, on pourra également consulter [BeKa] et [BLM].

REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier Bachir Bekka qui a relevé une lacune dans la preuve originale de Vershik et Karpushev et m'a communiqué des notes manuscrites sur le sujet. Je remercie Pierre de la Harpe avec qui j'ai eu de nombreuses discussions fructueuses sur le sujet. Je les remercie tous deux, ainsi qu'Alain Valette, pour les conseils et suggestions qu'ils m'ont donnés lors de la rédaction de cet article.

2. EXEMPLES

Pour les exemples 2 et 3, on trouvera une description de la topologie du dual unitaire dans [War2, §7.1] ou [Fel2].

EXEMPLE 1 : GROUPE ABÉLIEN

Si G est un groupe abélien, alors la topologie de Fell sur $\widehat{G}$ est séparée. Le cortex de G est réduit à $\{1_G\}$. Si χ est un caractère non-trivial de G, alors $\mathrm{H}^1(G,\chi) = 0$. Pour la représentation triviale, $\mathrm{H}^1(G, 1_G)$ coïncide avec le groupe des morphismes additifs

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}) = \{f\colon G \to \mathbf{C} \mid f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in G\}.$$

EXEMPLE 2 : LE GROUPE "$ax + b$"

Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbf{R},\ a > 0 \right\}$$

le groupe des transformations affines de la droite réelle préservant l'orientation. On a une identification canonique $G = \mathbf{R}_+^* \ltimes \mathbf{R}$ et on note respectivement A et B les sous-groupes $\{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}_+^*\}$ et $\{(1, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$.

Les représentations irréductibles de G sont d'une part les caractères de A étendus trivialement à G :

$$\chi_s \colon G \longrightarrow \mathbf{C} \colon (a,b) \longmapsto e^{is\log a}$$

pour $s \in \mathbf{R}$. D'autre part, pour $r \neq 0$, on a les représentations $\pi_r = \mathrm{Ind}_B^G \sigma_r$ induites des caractères

$$\sigma_r \colon B \longrightarrow \mathbf{C} \colon (0,b) \longmapsto e^{irb}.$$

En fait, π_r est équivalente à $\pi_+ := \pi_{+2\pi}$ ou $\pi_- := \pi_{-2\pi}$ suivant le signe de r. Les représentations $\pi_\pm$ agissent sur $\mathcal{H}_\pm = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}_+^*)$, où $\mathbf{R}_+^*$ est muni de la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}$, et sont données par

$$\left(\pi_\pm(a,b)\,\xi\right)(x) = a^{-\frac{1}{2}} e^{\pm 2\pi i\left(\frac{b}{x}\right)} \xi\left(\frac{x}{a}\right),$$

pour $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}_+^*)$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $(a,b) \in G$.

La topologie sur $\widehat{G} = \mathbf{R} \cup \{\pi_+\} \cup \{\pi_-\}$ peut être décrite comme la topologie quotient sur $\mathbf{R}^2/\mathcal{R}$ où $\mathbf{R}^2$ est muni de la topologie naturelle et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence donnée par

$$(s,r)\ \mathcal{R}\ (s',r') \Longleftrightarrow (r \text{ et } r' > 0) \text{ ou } (r \text{ et } r' < 0) \text{ ou } (r = r' = 0 \text{ et } s = s').$$

En particulier, les représentations π_+ et π_- sont des points ouverts de $\widehat{G}$ et contiennent faiblement tous les caractères χ_s.

Le cortex de G coïncide avec l'ensemble de toutes les représentations irréductibles de G. Par ailleurs, les seules représentations irréductibles qui possèdent une 1-cohomologie non-triviale sont 1_G, π_+ et π_- (voir [Gui2], § 9).

EXEMPLE 3 : LE GROUPE DE HEISENBERG

Soit $G = H_n$ le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$. Il s'agit de $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ avec la multiplication donnée par

$$(x,y,z)(x',y',z') := (x+x', y+y', z+z' + \tfrac{1}{2}(\langle x,y'\rangle - \langle y,x'\rangle))$$

pour $x, x', y, y' \in \mathbf{R}^n$ et $z, z' \in \mathbf{R}$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$.

Les représentations irréductibles de G sont d'une part les caractères de $\mathbf{R}^{2n}$ étendus à G :

$$\sigma_{(a,b)} \colon G \longrightarrow \mathbf{C} \colon (x,y,z) \longmapsto e^{i(\langle a,x\rangle + \langle b,y\rangle)}$$

pour $a, b \in \mathbf{R}^n$. D'autre part, on a les représentations de Schrödinger ρ_h, pour $h \in \mathbf{R}^*$. Si N désigne le sous-groupe $\{(0,y,z); y \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}\}$ de G, les représentations ρ_h sont les représentations induites $\mathrm{Ind}_N^G \chi_h$ des caractères

$$\chi_h : N \longrightarrow \mathbf{C} : (0, y, z) \longmapsto e^{ihz}.$$

Pour $h \in \mathbf{R}^*$, les représentations ρ_h agissent sur l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ et sont données par

$$(\rho_h(x, y, z)\xi)(t) = e^{ih(z+\langle y,t\rangle+\frac{1}{2}\langle x,y\rangle)}\xi(t+x)$$

pour $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, pour tout $t \in \mathbf{R}^n$.

La topologie sur $\widehat{G} = \mathbf{R}^{2n} \cup \mathbf{R}^*$ peut être décrite comme la topologie quotient de $\mathbf{R}^{2n+1}/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ donnée par

$$(a, b, h)\ \mathcal{R}\ (a', b', h') \Longleftrightarrow (h = h' \neq 0) \text{ ou } (h = h' = 0 \text{ et } (a, b) = (a', b')).$$

Donc, pour h tendant vers zero, les représentations ρ_h approchent simultanément tous les caractères.

Le cortex de G est constitué des caractères $\sigma_{(a,b)}$, avec $a, b \in \mathbf{R}^n$. Par ailleurs, la seule représentation irréductible qui possède une 1-cohomologie non-triviale est 1_G ([Gui2], § 8, corollaire 5).

EXEMPLE 4 : GROUPE DES DÉPLACEMENTS

Soit $G = \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbf{R}^n$ agissant sur l'espace $\mathbf{R}^n$ par

$$(A, v)x = Ax + v$$

où $A \in \mathrm{SO}(n)$ et $v, x \in \mathbf{R}^n$.

Si $n = 2$, les représentations irréductibles de G sont, d'une part, les représentations π_z, $z \in \mathbf{Z}$, de dimension un du groupe $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$ étendues trivialement à G :

$$\pi_z : G \longrightarrow \mathbf{C} : (A(\theta), v) \longmapsto e^{iz\theta}$$

où $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $v \in \mathbf{R}^2$. D'autre part, on a les représentations $\rho_u = \mathrm{Ind}_{\mathbf{R}^2}^G \chi_u$, $u \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, induites des caractères

$$\chi_u : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C} : v \longmapsto e^{i\langle u,v\rangle}$$

du sous-groupe normal $\mathbf{R}^2$. Si u et u' sont sur un même cercle de $\mathbf{R}^2$ (en fait, sur une même orbite de $\mathrm{SO}(2)$) alors ρ_u et $\rho_{u'}$ sont équivalentes (voir [Mac], § 3.9). Si $r > 0$ est le rayon du cercle correspondant, on note ρ_r leur classe d'équivalence.

Si r tend vers zéro, alors ρ_r tend vers la représentation quasi-régulière de G sur $\mathrm{L}^2(G/\mathbf{R}^2) \cong \mathrm{L}^2(\mathrm{SO}(2))$. Cette dernière contient toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(2)$. Le cortex de G est ainsi constitué de tous les caractères $\pi_z \in \widehat{\mathrm{SO}(2)}$.

On a deux représentations de dimension un de cohomologie non triviale

$$\pi_\pm \colon \mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathbf{C} \colon A(\theta) \longmapsto e^{\pm i\theta}$$

pour lesquelles un cocycle non trivial est donné par

$$b_\pm(A(\theta), (v_1, v_2)) = v_1 \pm i\, v_2$$

pour $(v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$ (voir [Gui2], §9, exemple 2).

Si $n \geq 3$, on considère l'action naturelle de $\mathrm{SO}(n)$ sur le dual de $\mathbf{R}^n$ et on désigne par K_u le stabilisateur d'un caractère χ_u de $\mathbf{R}^n$. Si $u \neq 0$, K_u est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(n)$ conjugué à $\mathrm{SO}(n-1)$. On obtient toutes les représentations irréductibles de G en considérant, d'une part, les représentations de dimension finie du groupe compact $\mathrm{SO}(n)$ étendues trivialement à G, et, d'autre part, les représentations

$$\rho_{\sigma,u} = \mathrm{Ind}_{K_u \ltimes \mathbf{R}^2}^{G}(\sigma \otimes \chi_u)$$

induites du sous-groupe $\mathrm{SO}(n-1) \ltimes \mathbf{R}^n$ où $\sigma \in \widehat{K_u}$ (voir [Mac]).

On a

$$\mathrm{cor}\, G = \{\pi \in \widehat{\mathrm{SO}(n)} \mid \pi \subset \mathrm{Ind}_{\mathrm{SO}(n-1)}^{\mathrm{SO}(n)} 1_{\mathrm{SO}(n-1)}\}\,.$$

En particulier, le cortex de G coïncide avec $\widehat{\mathrm{SO}(3)}$ pour $n = 3$ mais est un sous-ensemble strict de $\widehat{\mathrm{SO}(n)}$ pour pour $n \geq 4$ (voir [BeKa], exemple 2.10).

La seule représentation irréductible de cohomologie non triviale est de dimension n, donnée par la complexifiée de l'action naturelle de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathbf{R}^n$. Cela est dû au fait que l'espace $\mathbf{R}^n$ n'admet pas de structure complexe invariante pour l'action naturelle de $\mathrm{SO}(n)$. (Voir [Gui2], §9, exemple 2.) Un 1-cocycle non-trivial est donné par $b(A, v) = v$ pour $(A, v) \in G$.

Exemple 5 : groupes d'isométries hyperboliques

Soit $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$ la composante connexe du groupe des matrices $(n+1) \times (n+1)$ réelles qui préservent la forme quadratique sur $\mathbf{R}^{n+1}$ donnée par

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2\,.$$

Soit $G = \mathrm{SU}(n, 1)$ le groupe des matrices $(n+1) \times (n+1)$ complexes qui préservent la forme hermitienne sur $\mathbf{C}^{n+1}$ donnée par

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2 .$$

Delorme a montré que si $G = \mathrm{SO}_0(n,1)$, $n \geq 3$, alors il existe exactement une représentation dont la cohomologie est non triviale; et si $G = \mathrm{SU}(n,1)$, $n \geq 1$ ou $G = \mathrm{SO}_0(2,1) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ alors il existe exactement deux représentations, conjuguées l'une de l'autre, dont la cohomologie est non triviale (pour tout ceci, voir [Del]).

Bekka et Kaniuth ont montré que le cortex des groupes de Lie semi-simples à centres finis est toujours fini [BeKa]. De plus, on sait que le cortex de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ est constitué de la représentation triviale et des deux représentations dont la 1-cohomologie est non nulle [Mil].

Exemple 6 : groupes de Kazhdan

Un groupe localement compact G possède la *propriété (T) de Kazhdan* si la représentation 1_G est un point isolé dans $\widehat{G}$ pour la topologie de Fell. Les groupes qui possèdent la propriété (T) sont aussi appellés *groupes de Kazhdan*.

Il résulte des définitions que si G possède la propriété (T) alors le cortex de G est réduit à $\{1_G\}$. En appliquant le théorème de Vershik et Karpushev, on voit que si G est un groupe de Kazhdan alors la 1-cohomologie des représentations factorielles non triviales (en particulier les irréductibles) de G est toujours nulle.

En fait, un résultat dû à Guichardet et Delorme donne une caractérisation de la propriété (T) en terme de 1-cohomologie : le groupe G possède la propriété (T) si et seulement si $\mathrm{H}^1(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π de G (voir [HaVa], chapitre 4).

Donc, si le groupe G n'a pas la propriété (T), il existe une représentation unitaire pour laquelle $\mathrm{H}^1(G,\pi) \neq 0$. En 1982, Vershik et Karpushev se demandaient si l'on peut toujours trouver une telle représentation parmi les irréductibles. Sous l'hypothèse que le groupe G est engendré par une partie compacte, Y. Shalom a répondu positivement à cette question en montrant que les trois conditions suivantes sont équivalentes [Sha2] :

(i) G possède la propriété (T);

(ii) $\mathrm{H}^1(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire irréductible π ;

(iii) $\overline{\mathrm{H}^1}(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π où $\overline{\mathrm{H}^1}$ désigne la cohomologie réduite, quotient de l'ensemble des cocycles par l'adhérence des cobords pour la topologie de la convergence compacte.

Remarquons que l'hypothèse de génération compacte est nécessaire. En effet, si G est le groupe additif d'un espace vectoriel de dimension infinie sur le corps à deux éléments, alors G n'a pas la propriété (T) car il est abélien non compact, alors que $\mathrm{H}^1(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire irréductible π.

Des exemples de groupes de Kazhdan sont :

- $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, pour $n \geq 3$;
- plus généralement, les groupes de Lie réels simples qui ne sont pas localement isomorphes à ceux de l'exemple 5 ;
- les réseaux (sous-groupes discrets de covolume fini) dans de tels groupes, par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$, pour $n \geq 3$.

Pour des compléments concernant la propriété (T), on pourra se référer à [HaVa].

EXEMPLE 7 : GROUPES LIBRES

Si $\mathbf{F}_2$ désigne le groupe libre sur 2 générateurs, alors $\mathbf{F}_2$ admet une représentation irréductible qui est un point dense dans $\widehat{\mathbf{F}_2}$ (voir [Yosh] ou [Dav], théorème VII.6.5).

Le cortex de $\mathbf{F}_2$ est donc le dual $\widehat{\mathbf{F}_2}$ tout entier. De plus, toute représentation de $\mathbf{F}_2$ admet un premier groupe de cohomologie non-trivial (voir paragraphe 9, exemple 1 de [Gui2]). Ces résultats s'étendent au cas du groupe libre $\mathbf{F}_n$ sur n générateurs.

EXEMPLE 8 : LES GROUPES $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$ ET $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$

Soit G le produit semi-direct $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$ pour l'action naturelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ sur le plan $\mathbf{R}^2$. Montrons que le cortex de G s'identifie à celui de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$.

Soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation du cortex de G. Il existe une suite (π_n) dans $\widehat{G}$ qui converge à la fois vers π et 1_G. Comme la paire $(G,\mathbf{R}^2)$ possède la propriété (T) relative, la restriction de π_n à $\mathbf{R}^2$ admet pour n assez grand des vecteurs invariants non-nuls (voir [HaVa], proposition 2.2). Comme la représentation π_n est irréductible et $\mathbf{R}^2$ est normal dans G, on voit de plus que la restriction $\pi_n|_{\mathbf{R}^2}$ est la représentation identique, de sorte qu'on peut voir π_n comme une représentation de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Il en résulte que π est triviale sur $\mathbf{R}^2$, passe au quotient par $\mathbf{R}^2$ et définit une représentation de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, qui est dans le cortex.

Réciproquement, une représentation du cortex de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ définit par relèvement une représentation du cortex de G.

Les mêmes arguments sont valables pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$ où $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ désigne le groupe des matrices 2 fois 2 de déterminant un à coefficients entiers agissant naturellement sur le réseau $\mathbf{Z}^2$.

Exemple 9 : réseau dans un groupe de Lie simple

Soit Γ un réseau dans un groupe de Lie simple G non-compact et de centre trivial qui ne possède pas la propriété (T). On note λ_Γ la représentation régulière gauche de Γ sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ des fonctions de carrés sommables. Nous allons montrer que le cortex de Γ contient le support de λ_Γ.

En effet, le groupe G ne possède pas la propriété (T) et la représentation triviale 1_G est donc limite de représentations irréductibles non-triviales π_n. On peut supposer que ces représentations π_n ne sont pas faiblement contenues dans la représentation régulière λ_G de G car le groupe G n'est pas moyennable. En particulier, les π_n ne sont pas dans la série discrète de G de sorte que les restrictions $\pi_n|_\Gamma$ de π_n à Γ sont encore irréductibles (proposition 2.5 de [CoSt]). Par continuité de la restriction, la représentation triviale 1_Γ est encore limite des $\pi_n|_\Gamma$. De plus, la représentation régulière de Γ est faiblement contenue dans chacune de ces représentations $\pi_n|_\Gamma$ (théorème 1 de [BeHa]). Une représentation π faiblement contenue dans λ_Γ est donc limite de représentations (parmi les $\pi_n|_\Gamma$) qui tendent vers 1_Γ.

Exemple 10 : réseau dans un produit de groupes

Soit Γ un réseau irréductible dans un produit $G = G_1 \times G_2$ de deux groupes de Lie semi-simples sans facteur compact et de centres finis. L'irréductibilité de Γ signifie que, pour chaque $i = 1,2$, l'image de Γ par la projection $p_i \colon G \to G_i$ est dense dans G_i.

Chaque représentation irréductible σ de G_2 définit une représentation irréductible $1 \otimes \sigma$ de $G_1 \times G_2$ puis, par restriction, une représentation $(1 \otimes \sigma)|_\Gamma$ de Γ qui est toujours irréductible car la projection de Γ sur G_2 est dense. On note $\widehat{G_2}|_\Gamma$ le sous-ensemble de $\widehat{\Gamma}$ des représentations de ce type et $\overline{\widehat{G_2}|_\Gamma}$ son adhérence dans $\widehat{\Gamma}$.

Supposons que G_1 possède la propriété (T) et montrons que

$$\operatorname{cor}\Gamma \subset \overline{\widehat{G_2}|_\Gamma}.$$

Une représentation π du cortex de Γ est limite de représentations irréductibles π_n de Γ qui convergent également vers 1_Γ. Grâce au théorème 1 de [BeLo], on peut supposer que les représentations π_n sont de la forme $(1 \otimes \sigma_n)|_\Gamma$ où $\sigma_n \in \widehat{G_2}$. On peut être plus précis : $\pi \in \operatorname{cor}\Gamma$ si et seulement si π est limite de représentations $(1 \otimes \sigma_n)|_\Gamma$ où $\lim \sigma_n = 1_{G_2}$ dans $\widehat{G_2}$.

Concernant la cohomologie de la représentation triviale, le groupe $\mathrm{H}^1(\Gamma, 1_\Gamma)$ coïncide avec le groupe des morphismes additifs de Γ dans $\mathbf{C}$. Un tel morphisme est toujours trivial sur le sous-groupe $[\Gamma, \Gamma]$ des commutateurs et définit donc un morphisme du groupe abélianisé $\Gamma^{\mathrm{ab}} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ qui est fini dans notre cas (corollaire 2.7 de [LuZi]). Par suite, $\mathrm{H}^1(\Gamma, 1_\Gamma) = 0$. Plus généralement, on a $\mathrm{H}^1(\Gamma, \pi) = 0$ pour toute représentation π de dimension finie de Γ (voir le théorème 3.1 de [LuZi] ou le théorème B de [BeLo] pour une preuve élémentaire utilisant le résultat de Vershik et Karpushev présenté dans cet article).

Supposons de plus que le quotient G/Γ est compact et montrons qu'une représentation irréductible et non-triviale de Γ avec un premier groupe de cohomologie non-nul est forcément de la forme $(1 \otimes \sigma)|_\Gamma$ où σ est une représentation irréductible de G_2 telle que $\mathrm{H}^1(G_2, \sigma) \neq 0$. En effet, si π est une représentation irréductible non-triviale de Γ telle que $\mathrm{H}^1(\Gamma, \pi) \neq 0$, alors, soit π est de la forme désirée (c'est-à-dire $\pi = (1 \otimes \sigma)|_\Gamma$ avec $\mathrm{H}^1(G_2, \sigma) \neq 0$), soit π contient faiblement la représentation triviale 1_Γ (théorème 1 de [Lou]). Le second cas ne peut pas se produire. En effet, si π contenait faiblement 1_Γ, la représentation induite $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ contiendrait faiblement 1_G et sa restriction $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi)|_{G_1}$ contiendrait faiblement 1_{G_1}. La propriété (T) pour G_1 implique que la représentation $(\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi)|_{G_1}$ possèderait des vecteurs invariants de sorte que $\pi = (\rho \otimes 1)|_\Gamma$ pour une représentation irréductible ρ de G_1 ([BeLo], lemme 1). Par suite, la restriction $(\rho \otimes 1)|_\Gamma$ contiendrait faiblement 1_Γ, ce qui n'est pas possible (voir la remarque 2 de [Lou]).

On trouvera d'autres informations sur la cohomologie de ce type de groupes dans [Sha1] et [Lou].

TABLEAU RÉCAPITULATIF DES EXEMPLES

	G	$\widehat{G}$	$\operatorname{cor} G$	Représentations irréductibles avec $H^1 \neq 0$
1	abélien	séparé	$\{1_G\}$	1_G lorsque $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{C}) \neq 0$
2	affine $ax+b$	$\mathbf{R} \cup \{\pi_+\} \cup \{\pi_-\}$	$\widehat{G}$	$1_G,\ \pi_+,\ \pi_-$
3	Heisenberg H_n	$\mathbf{R}^{2n} \cup \mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}^{2n}$	1_G
4_2	$\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbf{R}^2$	$\mathbf{Z} \cup]0, \infty[$	$\mathbf{Z}$	$\pi_+,\ \pi_-$
4_3	$\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbf{R}^3$	$\widehat{\mathrm{SO}(3)} \cup \left(\widehat{\mathrm{SO}(2)} \times]0, \infty[\right)$	$\widehat{\mathrm{SO}(3)}$	rep. fondamentale de $\mathrm{SO}(3)$
$4_{\geq 3}$	$\mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbf{R}^n$	$\widehat{\mathrm{SO}(n)} \cup \left(\widehat{\mathrm{SO}(n-1)} \times]0, \infty[\right)$	$\operatorname{cor} G \subsetneq \widehat{\mathrm{SO}(3)}$	rep. fondamentale de $\mathrm{SO}(n)$
$5_{\mathbf{R},2}$	$\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$		$\{1_G, *, *\}$	$\{*, *\}$
$5_{\mathbf{R},\geq 3}$	$\mathrm{SO}_0(n,1),\ n \geq 3$		$\{1_G, *\}$?	$\{*\}$
$5_{\mathbf{C}}$	$\mathrm{SU}(n,1),\ n \geq 1$		$\{1_G, *, *\}$?	$\{*, *\}$
6	G avec (T)		$\{1_G\}$	$\varnothing$
7	$\mathbf{F}_n$		$\widehat{\mathbf{F}_n}$	$\widehat{\mathbf{F}_n}$
8	$\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$		$\operatorname{cor} \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$	
9	Γ réseau dans G sans (T)		$\operatorname{supp} \lambda_\Gamma \subset \operatorname{cor} \Gamma$	
10	Γ réseau dans $G_1 \times G_2$, G_1 avec (T)		$\operatorname{cor} \Gamma \subset \overline{\widehat{G_2}\vert_\Gamma}$	$(1 \otimes \sigma)\vert_\Gamma$ avec $H^1(G_2, \sigma) \neq 0$