3.6 Fonctions conditionnellement de type positif

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Pour α, π et β comme ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes (voir [HaVa], chapitre 4, lemme 3):

(i) α possède un point fixe;

(ii) α possède une orbite bornée;

(iii) toute orbite de α est bornée;

(iv) le cocycle b associé à α est borné;

(v) le cocycle b associé à α est un cobord.

3.6 Fonctions conditionnellement de type positif

Si $b\colon G \to \mathcal{H}$ est un cocycle continu pour la représentation π alors la fonction ψ définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2 \qquad \text{pour tout } g \in G\,,$$

est *conditionnellement de type positif*: pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \lambda_i \, \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0\,.$$

La fonction ψ est normalisée ($\psi(e) = 0$) et symétrique ($\psi(g) = \psi(g^{-1})$). Réciproquement, à une telle fonction continue ψ, on associe le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ où π_ψ est une représentation orthogonale de G dans l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\psi$ et b_ψ est un cocycle à coefficients dans $\mathcal{H}_\psi$ tel que, d'une part, le sous-espace engendré par $b_\psi(G)$ est dense dans $\mathcal{H}_\psi$, et d'autre part, pour tout $g \in G$, on a

$$\psi(g) = -\frac{1}{2}\|b_\psi(g)\|^2\,.$$

Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{R}$ de support fini et telles que $\sum_{x\in G} f(x) = 0$ alors $\mathcal{H}_\psi$ est l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant V pour la forme bilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y\in G} f(x)\, h(y)\, \psi(y^{-1}x)$$

et b_ψ applique $g \in G$ sur la classe dans $\mathcal{H}_\psi$ de la différence des fonctions caractéristique de g et e. La représentation π_ψ est déduite de l'action par multiplication à gauche de G sur V.

Soit π une représentation, b un 1-cocycle à coefficients dans π et $\psi = -\|b\|^2$ la fonction conditionnellement de type positif correspondante. On

note $\overline{\pi}$ la représentation conjuguée de π dans l'espace de Hilbert conjugué $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{b}$ le 1-cocycle à coefficients dans $\overline{\pi}$ correspondant à b. On peut alors réaliser $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ de la façon suivante: le cocycle b_ψ est donné par $b_\psi(g) = b(g) + \overline{b}(g)$, l'espace $\mathcal{H}_\psi$ est le sous-espace réel fermé de $\mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ engendré par $b_\psi(G)$, et π_ψ est la sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$ obtenue en restreignant l'action de $\pi \oplus \overline{\pi}$ au sous-espace réel invariant $\mathcal{H}_\psi$ (voir [Del], remarque V.3). De plus, pour tous $x, g \in G$, on a l'égalité

$$\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x)\,. \tag{3.1}$$

4. Preuve du théorème

Soient π une représentation factorielle du groupe G telle que

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) \neq 0$$

et b un 1-cocycle continu à coefficients dans π qui n'est pas un cobord. Il s'agit de montrer que le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.1 Stratégie

On considère la fonction conditionnellement de type positif $\psi\colon G \to \mathbf{R}$ définie par

$$\psi(x) = -\|b(x)\|^2$$

et le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ correspondant.

Pour tout $g \in G$ on a une fonction

$$\psi^g\colon G \longrightarrow \mathbf{C}\colon x \longmapsto \langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$$

qui est de type positif et qu'on va décomposer en une somme

$$\psi^g = \varphi^g + \chi^g \tag{4.1}$$

de deux fonctions de type positif (proposition 4.7).

Soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de 1_G dans $\widehat{G}$. En utilisant l'hypothèse que b n'est pas un cobord, nous montrons qu'il existe $g \in G$ tel que la fonction φ^g est non nulle (proposition 4.8) et limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons linéaires de fonctions de type positif associées à des représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$ (proposition 4.10).

La fin de la preuve est alors standard, et se déroule comme suit. Soit $(\mathcal{K}, \rho, \xi)$ le triple GNS défini par φ^g. Il résulte de l'assertion ci-dessus que