4.1 Stratégie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

note $\overline{\pi}$ la représentation conjuguée de π dans l'espace de Hilbert conjugué $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{b}$ le 1-cocycle à coefficients dans $\overline{\pi}$ correspondant à b. On peut alors réaliser $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ de la façon suivante: le cocycle b_ψ est donné par $b_\psi(g) = b(g) + \overline{b}(g)$, l'espace $\mathcal{H}_\psi$ est le sous-espace réel fermé de $\mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ engendré par $b_\psi(G)$, et π_ψ est la sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$ obtenue en restreignant l'action de $\pi \oplus \overline{\pi}$ au sous-espace réel invariant $\mathcal{H}_\psi$ (voir [Del], remarque V.3). De plus, pour tous $x, g \in G$, on a l'égalité

$$\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x)\,. \tag{3.1}$$

4. Preuve du théorème

Soient π une représentation factorielle du groupe G telle que

$$\mathrm{H}^1(G, \pi) \neq 0$$

et b un 1-cocycle continu à coefficients dans π qui n'est pas un cobord. Il s'agit de montrer que le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.1 Stratégie

On considère la fonction conditionnellement de type positif $\psi\colon G \to \mathbf{R}$ définie par

$$\psi(x) = -\|b(x)\|^2$$

et le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ correspondant.

Pour tout $g \in G$ on a une fonction

$$\psi^g\colon G \longrightarrow \mathbf{C}\colon x \longmapsto \langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$$

qui est de type positif et qu'on va décomposer en une somme

$$\psi^g = \varphi^g + \chi^g \tag{4.1}$$

de deux fonctions de type positif (proposition 4.7).

Soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de 1_G dans $\widehat{G}$. En utilisant l'hypothèse que b n'est pas un cobord, nous montrons qu'il existe $g \in G$ tel que la fonction φ^g est non nulle (proposition 4.8) et limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons linéaires de fonctions de type positif associées à des représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$ (proposition 4.10).

La fin de la preuve est alors standard, et se déroule comme suit. Soit $(\mathcal{K}, \rho, \xi)$ le triple GNS défini par φ^g. Il résulte de l'assertion ci-dessus que

le support de ρ est contenu dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$ pour la topologie de Fell. La décomposition (4.1) montre que ρ est une sous-représentation de la représentation GNS associée à ψ^g, qui est elle-même une sous-représentation de π_ψ ; et π_ψ est une sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$. Quitte à échanger les rôles de π et $\overline{\pi}$ (ce qui peut se faire sans perte de généralité car $\mathrm{H}^1(G,\pi) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{H}^1(G,\overline{\pi}) \neq 0$ et $\operatorname{supp}\pi \subset \operatorname{cor} G$ si et seulement si $\operatorname{supp}\overline{\pi} \subset \operatorname{cor} G$), on peut supposer que ρ possède une sous-représentation σ qui est équivalente à une sous-représentation de π.

Le support de σ est dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$, puisqu'il est contenu dans le support de ρ. Comme π est une représentation factorielle, σ et π sont quasi-équivalentes (proposition 5.3.5 de [Dix]), d'où il résulte que leurs supports coïncident. Par suite

$$\operatorname{supp}\pi = \operatorname{supp}\sigma \subset \overline{\widetilde{\mathcal{V}}}.$$

Ceci étant vrai pour tout choix de $\widetilde{\mathcal{V}}$, le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.2 Théorème de Schoenberg

Soit ψ une fonction conditionnellement de type positif sur un groupe G. Pour tout nombre réel $t > 0$, la fonction φ_t définie par

$$\varphi_t(g) = e^{t\psi(g)}$$

est de type positif. De plus,

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t - 1}{t} = \psi \tag{4.2}$$

avec des limites au sens de la topologie de la convergence compacte (voir par exemple le théorème 5.16 de [HaVa]).

4.3 Décomposition de Choquet

On dit qu'une mesure μ sur un espace Ω est *supportée* par une partie mesurable $A \subset \Omega$ si $\mu(\Omega \setminus A) = 0$.

Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et métrisable et K une partie convexe et compacte de F. On note $\operatorname{ex} K$ l'ensemble des points extrémaux de K. Une mesure de probabilité μ supportée par $\operatorname{ex} K$ détermine un unique élément $x \in K$ donné par la formule

$$x = \int_K y\, d\mu(y),$$

entendue au sens $*$-faible, c'est-à-dire au sens où