4.3 DÉCOMPOSITION DE CHOQUET

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

le support de ρ est contenu dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$ pour la topologie de Fell. La décomposition (4.1) montre que ρ est une sous-représentation de la représentation GNS associée à ψ^g, qui est elle-même une sous-représentation de π_ψ ; et π_ψ est une sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$. Quitte à échanger les rôles de π et $\overline{\pi}$ (ce qui peut se faire sans perte de généralité car $\mathrm{H}^1(G,\pi) \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{H}^1(G,\overline{\pi}) \neq 0$ et $\operatorname{supp}\pi \subset \operatorname{cor} G$ si et seulement si $\operatorname{supp}\overline{\pi} \subset \operatorname{cor} G$), on peut supposer que ρ possède une sous-représentation σ qui est équivalente à une sous-représentation de π.

Le support de σ est dans l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{V}}$, puisqu'il est contenu dans le support de ρ. Comme π est une représentation factorielle, σ et π sont quasi-équivalentes (proposition 5.3.5 de [Dix]), d'où il résulte que leurs supports coïncident. Par suite

$$\operatorname{supp}\pi = \operatorname{supp}\sigma \subset \overline{\widetilde{\mathcal{V}}}.$$

Ceci étant vrai pour tout choix de $\widetilde{\mathcal{V}}$, le support de π est contenu dans le cortex de G.

4.2 Théorème de Schoenberg

Soit ψ une fonction conditionnellement de type positif sur un groupe G. Pour tout nombre réel $t > 0$, la fonction φ_t définie par

$$\varphi_t(g) = e^{t\psi(g)}$$

est de type positif. De plus,

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t - 1}{t} = \psi \tag{4.2}$$

avec des limites au sens de la topologie de la convergence compacte (voir par exemple le théorème 5.16 de [HaVa]).

4.3 Décomposition de Choquet

On dit qu'une mesure μ sur un espace Ω est *supportée* par une partie mesurable $A \subset \Omega$ si $\mu(\Omega \setminus A) = 0$.

Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et métrisable et K une partie convexe et compacte de F. On note $\operatorname{ex} K$ l'ensemble des points extrémaux de K. Une mesure de probabilité μ supportée par $\operatorname{ex} K$ détermine un unique élément $x \in K$ donné par la formule

$$x = \int_K y\, d\mu(y),$$

entendue au sens $*$-faible, c'est-à-dire au sens où

$$f(x) = \int_K f(y)\, d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue f sur F ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément x de K peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout $x \in K$ il existe une mesure de probabilité μ sur K, supportée par $\operatorname{ex} K$, telle que

$$x = \int_K y\, d\mu(y)$$

au sens $*$-faible. Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point x (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où x est lui-même un point extrémal, la mesure μ qui donne une décomposition de Choquet du point x est unique et donnée par la mesure de Dirac δ_x au point x ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble $E_0(G)$ défini au numéro 3.2, il existe pour tout $t > 0$ une mesure de probabilité μ_t supportée par $P(G) \cup \{0\}$ telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

au sens faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f \rangle\, d\mu_t(\eta)$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^1(G)$ (voir [Dix], proposition 13.6.8).

4.4 Localisation

On note $\mathcal{V}$ le voisinage de la fonction 1 dans $P(G)$ qui est l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{V}}$ par l'application

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G} \colon \varphi \longmapsto \pi_\varphi .$$

On va décomposer les fonctions de type positif φ_t de la façon suivante. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de la fonction constante 1 dans $E_0(G)$ tel que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Puisque $\lim_{t \to 0} \varphi_t = 1$, on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$. On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \displaystyle\int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$