4.5. PROPOSITION. On conserve les notations précédentes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On a

$$\varphi_t = \int_{\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta)$$
$$= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \mu_t(\mathcal{W}))\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} .$$

En posant $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$, on obtient

$$\frac{\varphi_t - 1}{t} = \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1-\lambda_t)\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} = \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1-\lambda_t}{t}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t{}^{\mathcal{W}}\right) . \tag{4.3}$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0} \lambda_t = 1$;

(ii) $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ *uniformément sur tout compact;*

(iii) *pour tout* $t > 0$, $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ *est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de* $\mathcal{V}$.

De plus, pour une sous-suite de φ_t *que l'on indexe encore par* t,

(iv) *il existe une fonction* $\varphi_0 \in E_0(G)$, $\varphi_0 \not\equiv 1$ *telle que* $\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$ *pour la topologie* $*$*-faible;*

(v) *il existe un nombre réel positif* λ *tel que* $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda$.

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit* K *un compact convexe dans un espace métrisable. Soient* $\varphi \in \operatorname{ex} K$ *un point extrémal de* K *et* φ_t *une suite d'éléments de* K *telle que* $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$. *Pour chaque* t, *on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta \, d\mu_t(\eta)$$

où μ_t *est une mesure de probabilité supportée par* $\operatorname{ex} K$. *Alors, pour tout voisinage* $\mathcal{W}$ *de* φ *dans* K, *on a*

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1 .$$

Preuve. L'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des mesures de probabilité sur K est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite μ_{t_k} de μ_t qui converge

faiblement sur K vers une mesure μ. La suite φ_t converge vers φ qui est un point extrémal, donc

$$\varphi = \int_{\operatorname{ex} K} \eta \, d\mu(\eta)$$

et la mesure μ coïncide avec la mesure de Dirac δ_φ au point φ (Proposition 26.3 de [Cho]). De plus, toute sous-suite convergente de (μ_t) admet δ_φ comme limite. Autrement dit, δ_φ est l'unique point adhérent de la suite (μ_t) et $\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1$ pour tout voisinage $\mathcal{W}$ contenant φ. La mesure μ_t est supportée par $\operatorname{ex} K$, donc

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1$$

comme annoncé. $\square$

Preuve de (i). C'est une conséquence du lemme ci-dessus. En effet,

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = \lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} E_0(G)) = 1 \,.$$

Preuve de (ii). Les fonctions $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ et la fonction constante 1 appartiennent à l'ensemble $E(G)$ sur lequel les topologies $*$-faible et de la convergence compacte coïncident. Il suffit donc de montrer que $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(G)$, on a

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{\mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t, f \rangle = \langle 1, f \rangle \,.$$

Le lemme implique que

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \mu_t(E_0(G)\setminus \mathcal{W}) = 0 \,,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \langle \varphi_t^{\mathcal{W}}, f \rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \Big(\langle \varphi_t, f \rangle - \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta) \Big) = \langle 1, f \rangle \,.$$

Preuve de (iii). Pour une partie A de $E_0(G)$, on désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de A dans $E_0(G)$ pour la topologie $*$-faible et $\operatorname{co} A$ son enveloppe convexe. Posons

$$K_{\mathcal{W}} := \overline{\operatorname{co}(\mathcal{W} \cap P(G))}$$

et considérons la mesure $\mu_t^{\mathcal{W}}$, supportée par $\mathcal{W} \cap P(G)$, donnée par

$$\mu_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap \mathcal{W})}{\mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Ceci détermine une mesure de probabilité sur le compact convexe $K_{\mathcal{W}}$ telle que

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \int_{K_{\mathcal{W}}} \eta \, d\mu_t^{\mathcal{W}}(\eta)\,.$$

La proposition 26.3 de [Cho] implique que $\varphi_t^{\mathcal{W}} \in K_{\mathcal{W}}$. Autrement dit, la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit comme limite pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Or $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ appartient à $E(G)$ et $\mathrm{co}(\mathcal{W} \cap P(G)) \subset E(G)$ sur lequel les topologies de la convergence compacte et $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ coïncident, donc la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit aussi comme limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$.

Preuve de (iv). Comme la suite $(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}})$ est contenue dans $E_0(G)$ qui est compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, il existe une sous-suite, encore indexée par t, et un élément $\varphi_0 \in E_0(G)$ tel que

$$\lim_{t \to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$$

pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

Supposons que $\varphi_0 \equiv 1$. En particulier, on peut supposer que les fonctions $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$ qui apparaissent dans la sous-suite considérée sont toutes non nulles. Considérons la mesure $\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}$ définie par

$$\widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap (E_0(G) \backslash \mathcal{W}))}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \qquad \text{pour } A \subset E_0(G)\,.$$

Cette mesure est supportée par $(E_0(G) \backslash \mathcal{W}) \cap P(G)$, et donne pour tout t une décomposition de Choquet de $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$.

Puisque $\varphi_0 \equiv 1$ est un point extrémal, la mesure de probabilité μ_0 qui donne une décomposition de Choquet de φ_0 est la mesure de Dirac en 1 et vérifie

$$\mu_0 = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}\,.$$

Par conséquent,

$$1 = \mu_0(\mathcal{W}) = \lim_{t \to 0} \widetilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) = 0\,,$$

ce qui est absurde.

Preuve de (v). Montrons d'abord qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\frac{1-\lambda_t}{t}$ soit borné pour $0 < t < t_0$.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par t, on peut supposer que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty .$$

Choisissons un $g_0 \in G$ tel que $\varphi_0(g_0) \neq 1$ et un voisinage ouvert relativement compact $\mathcal{U}$ de g_0 dans G tel que

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \qquad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction $f \in \mathrm{L}^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. L'équation (4.3) donne

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right)\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle .$$

Grâce au choix de f, on a

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\varphi_0 - 1\right), f\right\rangle < 0$$

et

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle \leq 0 .$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty$, grâce à (4.2) on a

$$\left\langle \operatorname{Re}\psi, f\right\rangle = \lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = -\infty .$$

Comme ψ est continue et f est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda ,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5. $\square$

4.6 Constructions GNS

Fixons $g \in G$. En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\left\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x)\right\}$$

uniformément pour x parcourant les ensembles compacts de G.