4.6 Constructions GNS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Preuve de (v). Montrons d'abord qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\frac{1-\lambda_t}{t}$ soit borné pour $0 < t < t_0$.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par t, on peut supposer que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty .$$

Choisissons un $g_0 \in G$ tel que $\varphi_0(g_0) \neq 1$ et un voisinage ouvert relativement compact $\mathcal{U}$ de g_0 dans G tel que

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \qquad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction $f \in \mathrm{L}^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. L'équation (4.3) donne

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right)\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle .$$

Grâce au choix de f, on a

$$\lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right), f\right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\varphi_0 - 1\right), f\right\rangle < 0$$

et

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\right\rangle \leq 0 .$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty$, grâce à (4.2) on a

$$\left\langle \operatorname{Re}\psi, f\right\rangle = \lim_{t\to 0}\left\langle \operatorname{Re}\left(\tfrac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\right\rangle = -\infty .$$

Comme ψ est continue et f est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda ,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5. $\square$

4.6 Constructions GNS

Fixons $g \in G$. En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\left\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x)\right\}$$

uniformément pour x parcourant les ensembles compacts de G.

On utilise alors l'égalité (4.3) pour trouver

$$\begin{aligned}
&\langle \pi_\psi(x)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\rangle \\
&\quad = \lim_{t\to 0}\Big\{ \tfrac{1}{t}\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\big) \\
&\qquad + \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\big(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(xg) + \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(x)\big) \\
&\qquad - \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\big)\Big\}
\end{aligned}$$

uniformément pour x parcourant les parties compactes de G. Pour tout $t > 0$, soit $(\mathcal{H}_t, \pi_t, \xi_t)$ (resp. $(\widetilde{\mathcal{H}}_t, \widetilde{\pi}_t, \widetilde{\xi}_t)$) le triple GNS associé à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ (resp. $\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$). En posant

$$\eta_t^g = \frac{1}{\sqrt{t}}(\pi_t(g)\,\xi_t - \xi_t)\,, \quad \alpha_t^g = \widetilde{\pi}_t(g)\,\widetilde{\xi}_t - \widetilde{\xi}_t \quad \text{et} \quad \beta_t^g = \pi_t(g)\,\xi_t - \xi_t\,,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
(4.4) \qquad \langle \pi_\psi(\,.\,)\, b_\psi(g) \mid b_\psi(g)\rangle = \lim_{t\to 0}\Big\{ &\langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g\rangle \\
&+ \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\alpha_t^g \mid \alpha_t^g\rangle \\
&- \big(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\big)\langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

pour la topologie de la convergence compacte et donc aussi pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

4.7. PROPOSITION. *On pose* $\alpha_0^g = \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0$ *où* $(\mathcal{H}_0, \pi_0, \xi_0)$ *est le triple GNS associé à la fonction de type positif* φ_0 *apparaissant dans la proposition 4.5 (iv). Pour le reste, on conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0}\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\alpha_t^g \mid \alpha_t^g\rangle = \langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g\rangle$ *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *;*

(ii) $\lim_{t\to 0}\langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g\rangle = 0$ *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *;*

(iii) *il existe une sous-suite de* φ_t*, toujours indexée par* t*, et une fonction de type positif* φ^g *telle que, pour la topologie* $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$*, on ait*

$$\lim_{t\to 0}\langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g\rangle = \varphi^g\,.$$

Preuve. L'assertion (i) est une conséquence du fait que

$$\varphi_0 = \lim_{t\to 0}\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \lim_{t\to 0}\langle \widetilde{\pi}_t(\,.\,)\,\widetilde{\xi}_t \mid \widetilde{\xi}_t\rangle$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et que $\varphi_0 = \langle \pi_0(\,.\,)\,\xi_0 \mid \xi_0 \rangle$. Grâce à 4.5 (ii) on a

$$\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(\,.\,)\,\xi_t \mid \xi_t \rangle = \lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et donc

$$\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(\,.\,)\,\beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle = 0$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. Enfin, en utilisant la compacité de $E_0(G)$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, on peut extraire une sous-suite telle que $\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(\,.\,)\,\eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ existe. On note cette limite φ^g. $\square$

En passant à la limite dans (4.4), on écrit

$$\langle \pi_\psi(\,.\,)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \varphi^g + \lambda \langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle . \tag{4.5}$$

Pour chaque $g \in G$, ceci fournit un candidat pour une décomposition du type (4.1) avec $\chi^g = \lambda \langle \pi_0(\,.\,)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle$. Il reste à vérifier qu'il existe un élément $g \in G$ tel que la fonction φ^g possède les bonnes propriétés.

4.8. PROPOSITION. *Si le cocycle b n'est pas un cobord, alors il existe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$.*

Preuve. Si $\varphi^g \equiv 0$ pour tout $g \in G$, alors d'une part

$$\begin{aligned} \left\| \langle \pi_\psi(\,.\,)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \right\|_\infty &= \sup_{x\in G} \left| \langle \pi_\psi(x)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \right| \\ &= \langle \pi_\psi(e)\,b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \\ &= -2\,\psi(g) = 2\,\|b(g)\|^2 , \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \langle \pi_\psi(\,.\,) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \right\|_\infty &= \lambda \langle \pi_0(e)\,\alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle \\ &= \lambda \langle \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0 \mid \pi_0(g)\,\xi_0 - \xi_0 \rangle \\ &= 2\lambda \left(1 - \operatorname{Re} \varphi_0(g)\right) \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. La fonction de type positif φ_0 est bornée; l'égalité $\|b(g)\|^2 = \lambda(1 - \operatorname{Re}\varphi_0(g))$ implique que b est un cocycle borné sur G, donc un cobord. $\square$

Pour la suite, on fixe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$.

4.9. PROPOSITION. *Les fonctions de type positif* $\langle \pi_t(\,.\,)\eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ *sont uniformément bornées pour* $t > 0$, *autrement dit*

$$\sup_{t>0} \sup_{x\in G} \left| \langle \pi_t(x)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right| < \infty .$$

Preuve. On a

$$\sup_{x\in G} \left| \langle \pi_t(x)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right| = \langle \pi_t(e)\, \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle = \|\eta_t^g\|^2 .$$

On va montrer que $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est borné pour $t > 0$. Pour cela, écrivons l'égalité (4.4) au point $x = e$,

$$\left\| b_\psi(g) \right\|^2 = \lim_{t\to 0} \left\{ \langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle + \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle \right\} .$$

On a

$$\begin{aligned} \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle & \\ &= \left\{ 2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \widetilde{\pi}_t(g)\, \widetilde{\xi}_t \mid \widetilde{\xi}_t \rangle \right\} - \left\{ 2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \pi_t(g)\, \xi_t \mid \xi_t \rangle \right\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g) - \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g) \big) , \end{aligned}$$

et les suites

$$\left(\tfrac{1-\lambda_t}{t}\right) , \qquad \left| \varphi_t^{\mathcal{W}}(g) \right| \qquad \text{et} \qquad \left| \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g) \right|$$

sont bornées en t. Donc la suite $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est également bornée. □

4.10. PROPOSITION. *La fonction* φ^g *est limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes de fonctions de type positif associées à des représentations de* $\widetilde{\mathcal{V}}$.

Preuve. Grâce aux propositions 4.7 (iii) et 4.9, la fonction de type positif φ^g est limite pour la topologie $*$-faible de fonctions de type positif uniformément bornées associées aux représentations π_t. Ceci implique ([Fel1], Lemma 1.5) qu'il existe une suite θ_t de fonctions de type positif associées aux représentations π_t telle que

$$\varphi^g = \lim_{t\to 0} \theta_t$$

uniformément sur les compacts de G.

De plus, π_t est la représentation GNS associée à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ qui, d'après 4.5 (iii), est limite uniforme sur les compacts de combinaisons

convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Donc les fonctions de type positif associées à π_t sont limites uniformes sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Finalement, φ^g est elle-même limite uniforme sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Comme les fonctions de type positif appartenant à $\mathcal{V}$ sont associées aux représentations de $\widetilde{\mathcal{V}}$, ceci termine la preuve de la proposition. $\square$

On a donc établi une décomposition de la fonction $\langle \pi_\psi(\,.\,) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$ comme annoncé en 4.1. Ceci termine la preuve du Théorème. $\square$

RÉFÉRENCES

[BeHa] BEKKA, M. et P. DE LA HARPE. Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière. *Bull. Soc. Math. France 122* (1994), 333–342.

[BeKa] BEKKA, M. et E. KANIUTH. Irreducible representations of locally compact groups that cannot be Hausdorff separated from the identity representation. *J. reine angew. Math. 385* (1988), 203–220.

[BeLo] BEKKA, M. et N. LOUVET. On a variant of Kazhdan's property (T) for subgroups of semisimple groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47* (1997), 1065–1078.

[BLM] BOIDOL, J., J. LUDWIG et D. MÜLLER. On infinitely small orbits. *Studia Math. 88* (1988), 1–11.

[CoSt] COWLING, M. et T. STEGER. The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices. *J. reine angew. Math. 420* (1991), 85–98.

[Cho] CHOQUET, G. *Lectures on Analysis, Vol. 2.* W. A. Benjamin, 1969.

[Dav] DAVIDSON, K. R. *C^*-Algebras by Example.* Fields Institute Monographs *6.* Amer. Math. Soc., 1996.

[Del] DELORME, P. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles — Produits tensoriels continus de représentations. *Bull. Soc. Math. France 105* (1977), 281–336.

[Dix] DIXMIER, J. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, 1969.

[Fel1] FELL, J. M. G. The dual spaces of C^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc. 94* (1960), 365–403.

[Fel2] —— Weak containment and induced representations of groups. *Canad. J. Math. 14* (1962), 237–268.

[Gui1] GUICHARDET, A. Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus de représentations. *J. Multivariate Anal. 6* (1976), 138–158.

[Gui2] —— Sur la cohomologie des groupes topologiques II. *Bull. Sci. Math. (2) 96* (1972), 305–332.

[HaVa] DE LA HARPE, P. et A. VALETTE. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Astérisque *175.* Soc. Math. de France, 1989.