4. Curvature zero 2-planes in warped products

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

PROPOSITION 3.2. *Let* $M(2,b) := S^2 \times H^2 \times T^b$. *There exist local coordinates* $(u_1, \ldots, u_{4+b})$ *on* $M(2,b)$ *such that* $Q(\partial_i^u \wedge \partial_j^u) = 0$ *for* $1 \leq i < j \leq 4+b$.

Let ω be the volume form. Before beginning the proof of Proposition 3.2, we recall the following technical result and refer to [K, p. 6] for details:

LEMMA 3.3. *Let* M^n *be an orientable Riemannian manifold. Then around each point there exists a coordinate system* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *such that* $\omega(\partial_1^x, \ldots, \partial_n^x) = 1$.

Proof of Proposition 3.2. We use Lemma 3.3 to find local coordinates (x_1, x_2) and (y_1, y_2) on S^2 and H^2 such that $\omega(\partial_1^x, \partial_2^x) = 1$ and $\omega(\partial_1^y, \partial_2^y) = 1$. Let $(z_1, \ldots, z_b)$ be the usual flat coordinates on T^b. Define local coordinates on $S^2 \times H^2 \times T^b$ by:

$$u_1 := x_1 + y_1\,, \qquad u_2 := x_1 - y_1\,, \qquad u_3 := x_2 + y_2\,, \qquad u_4 := x_2 - y_2\,,$$

and $u_{k+4} = w_k$ for $1 \leq k \leq b$. We then have

$$\partial_1^u = \partial_1^x + \partial_1^y\,, \qquad \partial_2^u = \partial_1^x - \partial_1^y\,, \qquad \partial_3^u = \partial_2^x + \partial_2^y\,, \qquad \partial_4^u = \partial_2^x + \partial_2^y,$$

and $\partial_{4+k}^u = \partial_k^w$ for $k > 0$. If N is a Riemann surface with constant sectional curvature ϵ, then $\langle R(x,y)\,y, x\rangle = \epsilon\,\omega(x,y)$. Thus, the calculations performed in the proof of Proposition 3.1 show that $Q(\partial_i^u \wedge \partial_i^v) = 0$. $\square$

4. CURVATURE ZERO 2-PLANES IN WARPED PRODUCTS

We can use warped products to construct additional examples where Assertion 1.1 fails. We adopt the notation of [O, p. 210].

PROPOSITION 4.1. *Let* $M = B \times_f F$ *be a warped product, where* B *is a small open ball around* $(0,0)$ *in* $\mathbf{R}^2$, *where* $f(x,y) = x + y + xy + 1$ *is positive, and where* $F = \mathbf{R}$. *Then* M *is not flat. Furthermore* $Q(\partial_x \wedge \partial_y) = 0$, $Q(\partial_x \wedge \partial_z) = 0$, *and* $Q(\partial_y \wedge \partial_z) = 0$.

Proof. We use [O, p. 210, Proposition 42], to compute:

$$\langle R(\partial_x, \partial_y)\,\partial_x, \partial_z\rangle = 0, \qquad \langle R(\partial_x, \partial_z)\,\partial_x, \partial_z\rangle = 0,$$
$$\langle R(\partial_y, \partial_z)\,\partial_y, \partial_z\rangle = 0, \qquad \langle R(\partial_x, \partial_z)\,\partial_z, \partial_y\rangle = f. \qquad \square$$

Proposition 4.1 generalizes to higher dimensions by taking products with flat tori.