6. DÉMONSTRATION DU CAS GLOBAL

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\#\hat{c}(\mathbf{F}_p) > p + 1 - 2\sqrt{p} \geq (\sqrt{19} - 1)^2 > 11\,.$$

La contraction sur $\widehat{C}$ peut écraser 10 de nos points lisses, mais il reste au moins un point lisse sur $\widehat{C}(\mathbf{F}_p)$

Si $\widehat{C}/\mathbf{F}_p$ est de genre 0, ou si elle se décompose sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ en ayant une composante simple définie sur $\mathbf{F}_p$, le même argument montre qu'elle a toujours suffisamment de points pour en avoir qui soient lisses. Le seul cas où il faut s'inquiéter c'est quand elle se décompose sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ en cinq droites. Mais ce cas est exclu par notre hypothèse, car cela voudrait dire que chaque point de $\widehat{C}$ serait un point d'inflexion, et se trouverait donc sur la Hessienne H. $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition, il suffit donc de calculer la résultante de H avec $\widehat{C}$, en éliminant z, ce qui donne la réduction de

$$2^{44} \cdot (4x^5 - 12x^4y + 10x^3y^2 - 7xy^4 + 4y^5)^6 \cdot q(x : y)\,,$$

où $q(x : y)$ est un polynôme homogène, primitif, de degré 15. Ce n'est jamais 0 modulo un premier $p > 2$. $\square$

6. Démonstration du cas global

Proposition 6.1. *La courbe C donnée par* (1.1) *n'a pas de point rationnel.*

Preuve. On suppose que $(x : y : z)$ est une solution rationnelle de (1.1). On peut supposer que x, y et z sont des entiers et qu'ils n'ont pas de facteur en commun.

Soit p un premier rationnel différent de 2 et de 11, avec $p \not\equiv \pm 1 \pmod{11}$. Alors p ne divise pas r dans la formule (4.1) : sinon $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y$ serait dans $p\mathcal{O}_K$. Le fait que $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ est une $\mathbf{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$ montre alors que p diviserait y et $x + y$. Puisque p ne peut pas être facteur des trois coordonnées, on aurait donc $p \nmid z$, d'où $p \mid f$. Mais $f \equiv 16z^4 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

De la même manière, on montre que p ne divise pas s. Donc r et s sont composés de facteurs premiers 2, 11 et de premiers de la forme $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$. La même conclusion est vraie pour leurs facteurs y, z, f et g. Considérons $p = 2$ de plus près : rappelons-nous que $2\mathcal{O}_K$ est un idéal premier. On dénote par β la valuation de y en $2\mathbf{Z}$, et par γ celle de z.

On suppose dans un premier temps que β, $\gamma > 0$. Alors $2 \nmid x$, ce qui dit que $x - \varepsilon y \notin 2\mathcal{O}_K$. Ceci implique que $2^4 \parallel r$, autrement dit que $0 < \gamma \leq 4$ et que $2^{4-\gamma} \parallel f$. (On a utilisé la notation $\parallel$ pour dire «divise exactement»). Calculons f modulo 16:

$$f \equiv 4y^2 \cdot 3x^2 + 4y^3 \cdot x + 2y^4 \cdot 5 + 4yz \cdot x^2 + 2y^2z \cdot 5x + y^2z^2 + 8yz^3 \pmod{16}.$$

Par hypothèse, y et z sont au moins une fois divisibles par 2, le terme à droite est donc égal à 0 modulo 16, ce qui n'est pas possible car $16 \nmid f$.

Occupons-nous à présent du cas $\beta = 0$ et $\gamma > 0$: on a $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y \notin 2\mathcal{O}_K$, alors comme avant $2^{4-\gamma} \parallel f$. Cette fois-ci on regarde f modulo 4:

$$f \equiv 2 \cdot y^4 + 2xz \cdot y^2 + z^2 \cdot y^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

puisque $2 \nmid y$. Cela veut dire que $2 \parallel f$ et donc $\gamma = 3$. (On a vu dans 5.1 que derrière cela «se cache» une solution 2-adique. On ne pourrait pas l'éliminer en considérant $p = 2$.)

Comme dernière possibilité, on considère $\beta \geq 0$ et $\gamma = 0$: on voit que $x - \eta z = x + 3z - \theta z \notin 2\mathcal{O}_K$ (car $2 \nmid z$), alors $2^{4-\beta} \parallel g$ et $0 \leq \beta \leq 4$. On a

$$g \equiv 12x^2yz + 4xy^2z + 10y^3z + 4x^2z^2 + 10xyz^2 + yz^3 + 8z^4 \pmod{16}.$$

Si $\beta < 2$, alors

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{2^{4-\beta}} = |g|_2 = |yz^3|_2 = \frac{1}{2^\beta} > \frac{1}{4}.$$

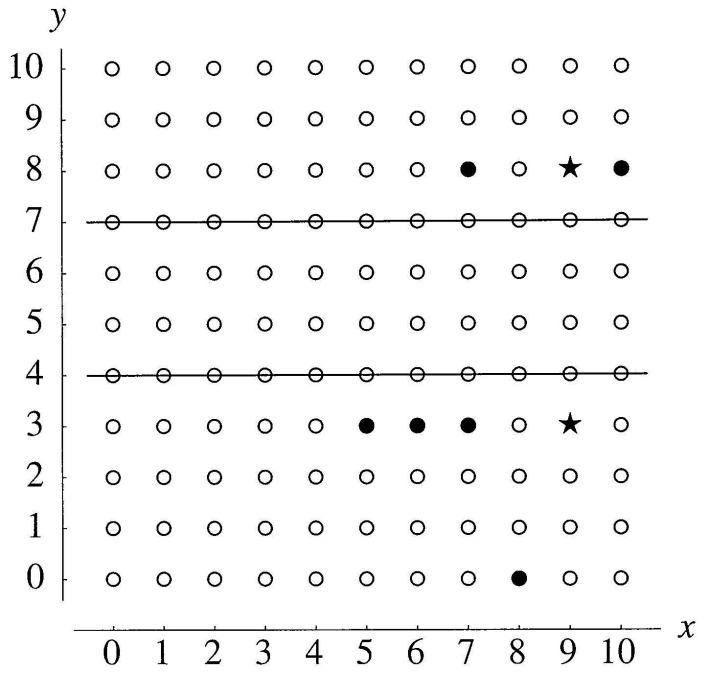
Si $\beta > 2$, alors $4 \mid g$, c-à-d.

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2^{4-\beta}} = |g|_2 \leq \frac{1}{4}.$$

Autrement dit, $\beta = 2$.

En résumé, il y a deux cas possibles pour (β, γ): soit $(0,3)$ soit $(2,0)$. Pour la fin de la démonstration, on se penche sur le premier $p = 11$:

PREMIER CAS: *y et z ne sont pas divisibles par* 11. On sait qu'ils sont composés de facteurs 2 et $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$. Si $(\beta, \gamma) = (0,3)$, alors $y \equiv \pm 1 \pmod{11}$ et $z \equiv \pm 2^3 \equiv \pm 8 \pmod{11}$. Leurs réductions se trouvent sur une des deux droites $l_1 : y = 4z$ ou $l_2 : y = 7z$ définies sur $\mathbf{F}_{11}$. Si $(\beta, \gamma) = (2,0)$, on a $y \equiv \pm 4 \pmod{11}$ et $z \equiv \pm 1 \pmod{11}$. Leurs réductions se trouvent sur les même droites. Mais ces deux droites ne coupent la courbe $\widehat{C}/\mathbf{F}_{11}$ en



FIGURE

La réduction de la courbe C dans le plan affine $z = 1$ sur $\mathbf{F}_{11}$

aucun point rationnel sur $\mathbf{F}_{11}$. La figure ci-dessus présente une «image» de la courbe dans la carte affine $z = 1$ sur $\mathbf{F}_{11}$. Les points noirs sont des points lisses et les étoiles des points singuliers de $\widehat{C}$.

DEUXIÈME CAS : *z est divisible par* 11. Alors $11 \mid zf = -16N(x - \varepsilon y)$, autrement dit, $x - \varepsilon y = x + y - 4\theta y + \theta^2 y \in (\theta)$. Pour cela il faut que $x + y \in 11\mathbf{Z}$, c-à-d. $x \equiv -y \not\equiv 0 \pmod{11}$. On calcule f modulo 11, sachant que $z \equiv 0 \pmod{11}$:

$$f \equiv 64x^4 - 224x^3y + 108x^2y^2 + 116xy^3 + 10y^4 \equiv 4y^4 \pmod{11}.$$

Dans le cas $(\beta, \gamma) = (0, 3)$, il faut que $y \equiv \pm 1 \pmod{11}$ puisqu'il n'est pas divisible par 11. D'autre part, $f \equiv 4 \pmod{11}$ devrait être le produit de $2^1 \equiv 2 \pmod{11}$ et de facteurs $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$. Dans le cas $(\beta, \gamma) = (2, 0)$, on a aussi une contradiction : $y \equiv \pm 4$, $f \equiv 4 \cdot 4^4 \equiv 1 \pmod{11}$ et $f \equiv 2^4 \cdot (\pm 1) \equiv \pm 5 \pmod{11}$.

TROISIÈME CAS : *y est divisible par* 11. Alors $11 \mid yg = -16N(x - \eta z)$. Pour cela il faut que $x + 3z \in 11\mathbf{Z}$. Cette fois-ci on considère g modulo 11, sachant que $y \equiv 0 \pmod{11}$ et $x \equiv -3z \pmod{11}$:

$$g \equiv -96x^4 - 224x^3z + 68x^2z^2 + 160xz^3 - 56z^4 \equiv 9z^4 \pmod{11}.$$

Comme avant, dans le cas $(\beta,\gamma) = (0,3)$: $z \equiv \pm 8$ et $g \equiv 2^4 \cdot (\pm 1) \equiv \pm 5 \not\equiv 9 \cdot 8^4 \equiv 3 \pmod{11}$. Et dans le cas $(\beta,\gamma) = (2,0)$: $z \equiv \pm 1$ et $g \equiv 2^2 \cdot (\pm 1) \not\equiv 9 \pmod{11}$. $\square$

7. La jacobienne de C

Il est certainement intéressant de connaître la jacobienne associée à la courbe. Nous allons construire une application birationnelle

$$\vartheta\colon C \dashrightarrow \mathrm{Jac}(C) = E$$

définie sur $\mathbf{Q}(\omega)$ à l'aide d'une transformation de Cremona de degré 3 du plan.

L'image de la conique B par l'application j est la droite

$$b = \overline{j(B)} = \{x_0 = x_1 = x_2 = 0\} \subset S \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}\,.$$

Prenons le point $R = (0:0:0:1:\omega) \in b(\mathbf{Q}(\omega))$ et calculons le plan tangent à S en R :

$$T_R S = T_R \mathcal{Q}_0 \cap T_R \mathcal{Q}_1 : \ \{-\omega x_0 + x_1 = 0\,, \quad \omega x_1 - x_2 = 0\}\,.$$

L'intersection de S avec $T_R S$ se décompose en deux droites b et e_1, où la seconde, qui correspond au diviseur exceptionnel de j au-dessus du point P_1, est décrite par les équations suivantes :

$$x_1 - \omega x_0 = 0\,, \qquad x_2 - \omega x_1 = 0\,, \qquad x_4 - \omega x_3 - (g_1 + g_3\omega^2 + \omega^4)\,x_0 = 0\,.$$

A ces trois équations correspondent trois cubiques du plan, passant par les point P_i et ayant un point double en P_1 :

$$A_0' : (y - \omega x)(xz - y^2) = 0\,, \qquad A_1' : (z - \omega y)(xz - y^2) = 0\,,$$

$$\begin{aligned} A_2' : \ & -g_0\omega\, x^3 + (g_0 - g_1\omega)\,x^2 y + (-g_2\omega - g_3\omega^2 - \omega^4)\,x^2 z \\ & + (g_1 + g_3\omega^2 + \omega^4)\,xy^2 + (g_2 - g_3\omega)\,xyz \\ & + (g_3 - g_4\omega)\,xz^2 + (g_4 - \omega)yz^2 + z^3 = 0\,. \end{aligned}$$

Les trois cubiques $\{A_0', A_1', A_2'\}$ constituent une base du système linéaire de telles cubiques définies sur $\mathbf{Q}(\omega)$. On peut constater que l'application associée $\vartheta' : \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}(\omega)} \dashrightarrow \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}(\omega)}$ est birationnelle car deux telles cubiques n'ont qu'un point d'intersection hors des points P_i. Elle contracte les quatre droites P_1P_j en des points $Q_j \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}(\omega))$ et elle contracte la conique B en un point $Q_1 = (0:0:1)$. D'autre part, elle éclate les points P_i. Le diviseur