Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 47 (2001)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE

Autor: WUTHRICH, Christian

Kapitel: 7. La jacobienne de C

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-65433

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comme avant, dans le cas $(\beta,\gamma) = (0,3)$: $z \equiv \pm 8$ et $g \equiv 2^4 \cdot (\pm 1) \equiv \pm 5 \not\equiv 9 \cdot 8^4 \equiv 3 \pmod{11}$. Et dans le cas $(\beta,\gamma) = (2,0)$: $z \equiv \pm 1$ et $g \equiv 2^2 \cdot (\pm 1) \not\equiv 9 \pmod{11}$. $\square$

7. La jacobienne de C

Il est certainement intéressant de connaître la jacobienne associée à la courbe. Nous allons construire une application birationnelle

$$\vartheta\colon C \dashrightarrow \mathrm{Jac}(C) = E$$

définie sur $\mathbf{Q}(\omega)$ à l'aide d'une transformation de Cremona de degré 3 du plan.

L'image de la conique B par l'application j est la droite

$$b = \overline{j(B)} = \{x_0 = x_1 = x_2 = 0\} \subset S \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}\,.$$

Prenons le point $R = (0:0:0:1:\omega) \in b(\mathbf{Q}(\omega))$ et calculons le plan tangent à S en R :

$$T_R S = T_R \mathcal{Q}_0 \cap T_R \mathcal{Q}_1 : \ \{-\omega x_0 + x_1 = 0\,, \quad \omega x_1 - x_2 = 0\}\,.$$

L'intersection de S avec $T_R S$ se décompose en deux droites b et e_1, où la seconde, qui correspond au diviseur exceptionnel de j au-dessus du point P_1, est décrite par les équations suivantes :

$$x_1 - \omega x_0 = 0\,, \qquad x_2 - \omega x_1 = 0\,, \qquad x_4 - \omega x_3 - (g_1 + g_3\omega^2 + \omega^4)\,x_0 = 0\,.$$

A ces trois équations correspondent trois cubiques du plan, passant par les point P_i et ayant un point double en P_1 :

$$A_0' : (y - \omega x)(xz - y^2) = 0\,, \qquad A_1' : (z - \omega y)(xz - y^2) = 0\,,$$

$$\begin{aligned} A_2' : \ & -g_0\omega\, x^3 + (g_0 - g_1\omega)\,x^2 y + (-g_2\omega - g_3\omega^2 - \omega^4)\,x^2 z \\ & + (g_1 + g_3\omega^2 + \omega^4)\,xy^2 + (g_2 - g_3\omega)\,xyz \\ & + (g_3 - g_4\omega)\,xz^2 + (g_4 - \omega)yz^2 + z^3 = 0\,. \end{aligned}$$

Les trois cubiques $\{A_0', A_1', A_2'\}$ constituent une base du système linéaire de telles cubiques définies sur $\mathbf{Q}(\omega)$. On peut constater que l'application associée $\vartheta' : \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}(\omega)} \dashrightarrow \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}(\omega)}$ est birationnelle car deux telles cubiques n'ont qu'un point d'intersection hors des points P_i. Elle contracte les quatre droites P_1P_j en des points $Q_j \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}(\omega))$ et elle contracte la conique B en un point $Q_1 = (0:0:1)$. D'autre part, elle éclate les points P_i. Le diviseur

exceptionnel au-dessus de P_1 est la conique B' définie par les Q_i et les diviseurs exceptionnels au-dessus des autres points P_j sont des droites.

Sous cette transformation ϑ', la quintique C se simplifie en une cubique lisse $E'/\mathbf{Q}(\omega)$ passant par les quatre points Q_j pour $1 < j \leq 5$, d'équation du style

$$0 = (-5632 + 8448\omega + 640\omega^2 + 5184\omega^4)\,x^3 + \cdots + 1024\,z^3\,.$$

En reliant les deux autres intersections de E' avec B', on trouve un point T de E' défini sur $\mathbf{Q}(\omega)$ qui peut servir pour transformer E' en une forme de Weierstrass E (voir [Ca]), sans être obligé de monter dans un corps encore plus grand. Là, le miracle prédit par la théorie: E est définie sur $\mathbf{Q}$ (puisqu'elle est la jacobienne de C, une courbe définie sur $\mathbf{Q}$). Sans donner les détails du calcul, je présente les résultats: l'*invariant*

$$j = \frac{3443566663693729}{1289106508910} = \frac{151009^3}{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 421 \cdot 27836461} = 2671,2817\ldots\,,$$

la *forme canonique*

$$Y^2 = X^3 + AX + B$$

avec

$$\begin{aligned} A &= -45223323296172470380044301516426 8 \\ B &= -21996454706369000130454317982498938892946059949 28\,, \end{aligned}$$

la *forme minimale globale* de E

$$Y^2 = X^3 + X^2 + a_4 X + a_6$$

avec

$$\begin{aligned} a_4 &= -5583126332860798812351148335361 \\ a_6 &= -3017346324604802976330769113064479136657958145 \end{aligned}$$

et le *conducteur arithmétique*

$$\begin{aligned} N &= 1143864722620401428256678161374838265280 \\ &= 2^6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37^2 \cdot 421 \cdot 72497^2 \cdot 151009^2 \cdot 27836461\,. \end{aligned}$$

Grâce à quelques réductions, on montre que *le groupe de torsion de* $E(\mathbf{Q})$ *est trivial.* Par construction, (C, ϑ) représente un élément d'ordre 5 du groupe de Tate-Shafarevich $Ш(E/\mathbf{Q})$. Si ce groupe est fini, son ordre est divisible par 25.

REMERCIEMENTS. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Sylvia Guibert, à Christian Liedtke, aux frères Bartholdi et surtout aux professeurs Dino Lorenzini et Daniel Coray.

Les calculs monstrueux avec des milliers de polynômes ont été faits par *Mathematica*® et *PARI-GP*®.

RÉFÉRENCES

[Be] BEAUVILLE, A. *Surfaces algébriques complexes.* Astérisque 54, 1978.

[Ca] CASSELS, J. W. S. *Lectures on Elliptic Curves.* Cambridge Univ. Press, 1991.

[CF] CASSELS, J. W. S. et A. FRÖHLICH. *Algebraic Number Theory.* Academic Press, London, 1967.

[CCS] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L., D. CORAY et J.-J. SANSUC. Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. *J. reine angew. Math. 320* (1980), 150–191.

[CP] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et B. POONEN. Algebraic families of nonzero elements of the Shafarevich-Tate group. *J. Amer. Math. Soc. 13* (2000), 83–99.

[Co] CORAY, D. F. Arithmetic on Cubic Surfaces. PhD thesis. University of Cambridge, 1974.

[Fi] FISHER, T. A. On 5 and 7 Descents for Elliptic Curves. PhD thesis. University of Cambridge, 2000.

[Fu] FUJIWARA, M. Hasse principle in algebraic equations. *Acta Arith. 22* (1972/73), 267–276.

[Li] LIND, C.-E. Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins. PhD thesis. University of Uppsala, 1940.

[Re] REICHARDT, H. Einige im Kleinen überall lösbare, im Großen unlösbare diophantische Gleichungen. *J. reine angew. Math. 184* (1942), 12–18.

[Se] SELMER, E. The diophantine equation $aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0$. *Acta Math. 85* (1951), 203–362.

(Reçu le 22 janvier 2001)

Christian Wuthrich

Section de Mathématiques
Case postale 240
CH-1211 Genève 24
Suisse
e-mail: christian.wuthrich@math.unige.ch