Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 48 (2002), p. 191–207

ON THE RATIONAL FORMS OF NILPOTENT LIE ALGEBRAS AND LATTICES IN NILPOTENT LIE GROUPS

by Yu. S. SEMENOV *)

ABSTRACT. We study the rational forms of real finite-dimensional nilpotent Lie algebras and the corresponding lattices in nilpotent Lie groups. We show that for some Lie algebras there are infinitely many such rational forms up to isomorphism and give a description of isomorphism classes in several 6-dimensional cases. Nilpotent Lie algebras with a unique rational form are also considered.

1. INTRODUCTION

Let $\mathfrak{g}$ be a finite-dimensional Lie algebra over $\mathbf{R}$ and $\mathfrak{h}$ be a $\mathbf{Q}$-subalgebra of $\mathfrak{g}$. We say that $\mathfrak{h}$ is a rational form (or $\mathbf{Q}$-form) of $\mathfrak{g}$ if there exists a basis X of $\mathfrak{h}$ over $\mathbf{Q}$ such that X is a basis of $\mathfrak{g}$ over $\mathbf{R}$. In other words, the inclusion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ gives rise to an isomorphism $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \mathfrak{g}$.

In the sequel all Lie algebras are assumed to be nilpotent and finite-dimensional unless otherwise specified. The main purpose of the present work is to describe rational forms for some real nilpotent Lie algebras. The rational forms (or their isomorphism classes) in such algebras are closely related to lattices, i.e., discrete cocompact subgroups in nilpotent Lie groups.

Let G be a nilpotent connected 1-connected Lie group and $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G. It is well known that $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ and $\log\colon G \to \mathfrak{g}$ are two reciprocal diffeomorphisms. Let $\mathfrak{h}$ be a rational form of $\mathfrak{g}$ and $X = \{x_1, \dots, x_d\}$ be a basis of $\mathfrak{h}$. Malcev showed in [5] that the subgroup Γ of G generated by $\exp(rx_1), \dots, \exp(rx_d)$ (where r is an appropriate integer) is a lattice of G.

*) This work has been supported by the Swiss National Science Foundation.