# 2.2 Example of a free nilpotent algebra

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

skew-symmetric $d \times d$ matrix $M = (\mu_{ij})$ with respect to the basis $B_1, \dots, B_d$ (mod $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$). Namely, $[B_i, B_j] = \mu_{ij} B_{d+1}$. Over $\mathbf{Q}$ one can choose a canonical symplectic basis $\widehat{B_1}, \dots, \widehat{B_d}$ (mod $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$) so that the matrix $\widehat{M}$ representing $\omega$ has $l$ blocks of type

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

standing on the diagonal, the other entries being trivial. The rank of $\omega$ is equal to $2l$ and $2l = d - m$. In the basis $B_1, \dots, B_{d+1}$ (we omit the 'hats') of $\mathfrak{h}$

$$[B_1, B_2] = [B_3, B_4] = \cdots = [B_{2l-1}, B_{2l}] = B_{d+1},$$

all the other brackets being trivial. This completes the proof.

## 2.2 Example of a free nilpotent algebra

Let $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{R})$ be the free nilpotent Lie algebra of class $c$ on $n$ generators. Then $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{R})$ has a unique rational form $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{Q})$ up to isomorphism (cf. Theorem 2).

Indeed, let $\mathfrak{h} = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$ be a rational form of $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{R})$. We may suppose that $x_1, \dots, x_n$ span (modulo the derived subalgebra) $\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cong \mathbf{Q}^n$. Consequently, $\mathfrak{h}$ is generated by $\{x_1, \dots, x_n\}$ as a Lie algebra. There exists an epimorphism $\pi \colon \mathfrak{f}_c(n, \mathbf{Q}) \to \mathfrak{h}$ because $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{Q})$ is free. It must be an isomorphism since the dimension of $\mathfrak{h}$ equals the dimension (not depending on the ground field) of a free nilpotent Lie algebra of class $c$ on $n$ generators.

## 2.3 More examples

The purpose of this subsection is to sketch two more examples of Lie algebras with a unique rational form up to isomorphism.

Let $\mathfrak{g}_t$, $t \in \mathbf{R}$, be a family of real 6-dimensional Lie algebras with a basis $\{x_1, \dots, x_6\}$ such that

$$[x_1, x_2] = x_3\,, \quad [x_1, x_3] = t x_5\,, \quad [x_1, x_5] = x_6\,,$$
$$[x_2, x_3] = x_4\,, \quad [x_2, x_4] = x_5\,, \quad [x_3, x_4] = x_6\,,$$

other brackets being trivial. One can show that

1. $C^k \mathfrak{g}_t = \langle x_{k+1}, \dots, x_6 \rangle$, $k = 2, \dots, 5$, where $C^k \mathfrak{g}_t$ are the terms of the lower central series of $\mathfrak{g}_t$.
2. The centralizer $\mathfrak{C}$ of $C^4 \mathfrak{g}_t$, that is, $\mathfrak{C} = \{c \in \mathfrak{g}_t \mid [c, C^4 \mathfrak{g}_t] = 0\}$ is spanned by $x_2, \dots, x_6$.