4.1 Basic lemma

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4. Nilpotent Lie algebras with infinitely many non-isomorphic rational forms

In this section we propose a construction which can provide a series of nilpotent Lie algebras with infinitely many isomorphism classes of rational forms.

4.1 Basic lemma

Let

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{c} \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}(\mathbf{Q})$$

be a graded Lie algebra over $\mathbf{Q}$ generated by $\mathfrak{h}_1$. Let $\mathbf{K}$ be a number field, $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{K} = d$, of type (s,t), that is, there are s real and $2t$ complex embeddings of $\mathbf{K}$ in $\mathbf{C}$ $(d = s + 2t)$ whence there exists an isomorphism of $\mathbf{R}$-algebras

$$\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbf{R} \oplus \bigoplus_{l=1}^{t} \mathbf{C}.$$

More generally one can take a finite-dimensional commutative associative algebra $\mathbf{A}$ over $\mathbf{Q}$ instead of $\mathbf{K}$. We consider the Lie algebra $\mathfrak{h}(\mathbf{K}) = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{K}$ as a Lie algebra over $\mathbf{Q}$. This algebra has two important properties. Firstly,

$$\mathfrak{h}(\mathbf{K}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong (\mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{K}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong \mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{Q}} (\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \cong \bigoplus_{k=1}^{s} \mathfrak{h}(\mathbf{R}) \oplus \bigoplus_{l=1}^{t} \mathfrak{h}(\mathbf{C}),$$

i.e., $\mathfrak{h}(\mathbf{K})$ is a $\mathbf{Q}$-form of the last Lie algebra for any number field $\mathbf{K}$ of type (s,t). Secondly, there is an embedding $R\colon \mathbf{K}^* \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}}(\mathfrak{h}(\mathbf{K}))$ of the multiplicative group $\mathbf{K}^*$ such that $R(k)(h_i \otimes k_1) = h_i \otimes \tilde{k}k^i$ where $h_i \in \mathfrak{h}_i$ is homogenenous of degree i. The following lemma is straightforward.

Lemma 4.1. *Let $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}'$ be two distinct number fields of the same type. If there is no injection of $\mathbf{K}^*$ into $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}}(\mathfrak{h}(\mathbf{K}'))$ then two $\mathbf{Q}$-forms $\mathfrak{h}(\mathbf{K})$ and $\mathfrak{h}(\mathbf{K}')$ are not isomorphic.*

4.2 Proof of Theorem 2

We start with the class of nilpotence $c = 2$. Let $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ and $\mathbf{K}' = \mathbf{Q}(\sqrt{n})$, where $m \neq n$ are two positive (resp. negative) square-free integers. Consider the automorphism $A = R(\sqrt{m})$ of $\mathfrak{h}(\mathbf{K}) = \mathfrak{f}_2(p, \mathbf{K})$. One immediately checks that

1) A^2 acts on $\mathfrak{h}(\mathbf{K})/[\mathfrak{h}(\mathbf{K}), \mathfrak{h}(\mathbf{K})]$ as $m \cdot Id$;

2) the restriction

$$A|_{[\mathfrak{h}(\mathbf{K}),\mathfrak{h}(\mathbf{K})]} = m \cdot Id.$$