Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 48 (2002), p. 259–262

AN HOMOLOGY 4-SPHERE GROUP WITH NEGATIVE DEFICIENCY

by Jonathan A. HILLMAN

ABSTRACT. We give an example to show that homology 4-sphere groups need not have deficiency 0.

The *deficiency* $\mathrm{def}(G)$ of a finitely presentable group G is the maximum over all finite presentations $\mathcal{P}$ for G of the differences $g-r$, where g is the number of generators and r is the number of relations in the presentation. It is well-known that $\mathrm{def}(G)$ may be bounded above by homological invariants [Ep61]. In high dimensions, whether a finitely presentable group can be realized as the fundamental group of an n-manifold with prescribed homology depends only on the homology of the group; in low dimensions ($n \leq 4$) such conditions remain necessary, while constraints on the deficiency often suffice. However bridging the gap between homologically necessary conditions and combinatorially sufficient conditions is usually a delicate matter. This note considers one such situation.

A group G is *perfect* if it is equal to its commutator subgroup G', i.e., if the abelianization $G/G' \cong H_1(G;\mathbf{Z})$ is trivial. If G is the fundamental group of an homology n-sphere then it is finitely presentable and *superperfect*, i.e., $H_1(G;\mathbf{Z}) = H_2(G;\mathbf{Z}) = 0$. These conditions characterize homology n-sphere groups for $n \geq 5$ [Ke69], but in low dimensions more stringent conditions hold. Every perfect group with a presentation of deficiency 0 is an homology 4-sphere group (and therefore is superperfect) [Ke69], but there are finite superperfect groups which are not homology 4-sphere groups [HW85]. As any closed 3-manifold has a handlebody structure with one 0-handle and equal numbers of 1- and 2-handles, homology 3-sphere groups have deficiency 0. However although the finite groups $\mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_p)$ are perfect and have deficiency 0 for each prime $p \geq 5$ [CR80] the binary icosahedral group $I^* = \mathrm{SL}(2,\mathbf{F}_5)$ is the only finite homology 3-sphere group.