3.4 SOME 4-DIMENSIONAL CW-COMPLEXES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3.4 Some 4-dimensional CW-complexes

By Remark 3.4, a handle decomposition of X gives us a CW-complex which is homotopy equivalent to X. The following discussion will enable us to understand the 4-skeleton of that complex.

Let $W := S^2 \vee \cdots \vee S^2$ be the b-fold wedge product of 2-spheres. Suppose X is the CW-complex obtained by attaching a 4-cell to W via the map $g \in \pi_3(W)$. The Hilton-Milnor theorem ([30], Thm. 7.9.4) asserts that

$$\pi_3(W) = \bigoplus_{i=1}^{b} \pi_3(S^2) \oplus \bigoplus_{1 \le i < j \le b} \pi_3(S^3).$$

Choosing the standard generators for $\pi_3(S^2)$ and $\pi_3(S^3)$, we can describe g by a tuple $(l_i, i = 1, \ldots, b; l_{ij}, 1 \le i < j \le b)$ of integers. These integers determine the cohomology ring of $X = W \cup_g D^4$ as follows:

Proposition 3.11. *Let $y \in H^4(X, \mathbf{Z})$ be the generator of $H^4(X, \mathbf{Z})$ given by the attached 4-cell and $x_1, \ldots, x_b$ the canonical basis of $H^2(X, \mathbf{Z}) = H^2(W, \mathbf{Z})$. Then*

$$\begin{aligned} x_i \cup x_j &= l_{ij} \cdot y, \qquad 1 \le i < j \le b, \\ x_i \cup x_i &= l_i \cdot y, \qquad i = 1, \ldots, b. \end{aligned}$$

This is proved like [22], (1.5), p. 103. We recall the proof in the following example.

Example 3.12. We treat the case $b = 2$. Consider the embedding

$$\iota \colon S^2 \vee S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2 \hookrightarrow \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty .$$

The standard basis for $H^4(\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{\oplus 3}$ is given by the elements y_1, y_2, y_3 obtained from attaching D^4 via $(1,0;0)$, $(0,0;1)$, and $(0,1;0)$, respectively. Let $h \colon D^4 \longrightarrow D^4 \vee D^4 \vee D^4$ be the canonical map followed by

$$\big(\vartheta \cdot x \longmapsto \vartheta \cdot m_{l_1}(x)\big) \vee \big(\vartheta \cdot x \longmapsto \vartheta \cdot m_{l_{12}}(x)\big) \vee \big(\vartheta \cdot x \longmapsto \vartheta \cdot m_{l_2}(x)\big).$$

Here, m_k stands for a representative of $[k \cdot \mathrm{id}_{S^3}] \in \pi_3(S^3)$ and $D^4 = \{\vartheta \cdot x \mid x \in S^3, \vartheta \in [0,1]\}$. Now, h and ι glue to a map $f \colon X \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty$, and

$$\begin{aligned} f^* \colon H^4(\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty, \mathbf{Z}) &\longrightarrow H^4(X, \mathbf{Z}) \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 &\longmapsto \big(a_1 l_1 + a_2 l_{12} + a_3 l_2\big) y, \end{aligned}$$

so that the assertion follows from the naturality of the cup-product.