3.5 Pontrjagin classes and $\pi_3(SO(4))$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3.5 Pontrjagin classes and $\pi_3(\mathrm{SO}(4))$

Vector bundles of rank 4 over S^4 are classified by elements in $\pi_3(\mathrm{SO}(4))$. In our setting, such vector bundles will appear as normal bundles. We recall, therefore, the description of that group and relate it to Pontrjagin classes and self intersection numbers.

First, look at the natural map $\pi_3(\mathrm{SO}(4)) \longrightarrow \pi_3\big(\mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3)\big) = \pi_3(S^3)$. This map has a splitting ([32], §22.6) which induces an isomorphism

$$\pi_3(\mathrm{SO}(4)) = \pi_3(\mathrm{SO}(3)) \oplus \pi_3(S^3)\,.$$

Let α_3 be the generator for $\pi_3(\mathrm{SO}(3)) \cong \mathbf{Z}$ from [32], §22.3, and $\beta_3 := [\mathrm{id}_{S^3}] \in \pi_3(S^3)$, so that we obtain the isomorphism $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \pi_3(\mathrm{SO}(4))$, $(k_1, k_2) \longmapsto k_1\alpha_3 + k_2\beta_3$. Finally, the kernel of the map $\pi_3(\mathrm{SO}(4)) \longrightarrow \pi_3(\mathrm{SO})$ to the stable homotopy group is generated by $-\alpha_3 + 2\beta_3$ ([32], §23.6), whence [23], (20.9), implies

Proposition 3.13. *Let E be the vector bundle over S^4 defined by the element $k_1\alpha_3 + k_2\beta_3 \in \pi_3(\mathrm{SO}(4))$. Then*

$$p_1(E) = \pm(2k_1 + 4k_2)\,.$$

Corollary 3.14. *Let $f\colon S^4 \longrightarrow M$ be a differentiable embedding of S^4 into the differentiable 8-manifold M. Let $E := f^*T_M/T_{S^4}$ be the normal bundle. Then the self intersection number s of $f(S^4)$ in M satisfies*

$$2s \equiv p_1(E) \mod 4\,.$$

Proof. If E is given by the element $k_1\alpha_3 + k_2\beta_3 \in \pi_3(\mathrm{SO}(4))$, then $s = k_2$ ([17], (5.4), p. 72). Since $p_1(E) = \pm(2k_2 + 4k_1)$, the claim follows. □

3.6 Links of 3-spheres in $\#_{i=1}^b(S^2 \times S^5)$

If X is a closed E-manifold of dimension 8 with $w_2(X) = 0$, then $W_2 := \#_{i=1}^b(S^2 \times D^6)$, $b = b_2(X)$, by Lemma 3.5. Thus, W_4 is determined by a framed link of 3-spheres in $\partial W_2 = \#_{i=1}^b(S^2 \times S^5)$. Therefore, we will now classify such links.

So, let $W := \#_{i=1}^b(S^2 \times S^5)$ be a b-fold connected sum. We can choose b disjoint 2-spheres S_i^2, $i = 1, \ldots, b$, embedded in W and representing the natural basis of $H_2(W, \mathbf{Z})$. One checks that the homotopy type of W is given up to dimension 4 by the b-fold wedge product $S^2 \vee \cdots \vee S^2$. Suppose we are given a link of b' three-dimensional spheres, i.e., we are given b' differentiable embeddings $g_i\colon S^3 \longrightarrow W$, $i = 1, \ldots, b'$, with $g_i(S^3) \cap g_j(S^3) = \varnothing$ for $i \neq j$.