# 1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

*L'Enseignement Mathématique, t. 48 (2002), p. 291–315*

# UNE PREUVE GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE JUNG

par Stéphane LAMY

## 1. INTRODUCTION

L'espace affine complexe $\mathbf{C}^n$ possède les qualités propres aux objets mathématiques fascinants : de nature très simple, il se trouve être à la base d'une multitude de problèmes intéressants et difficiles. En particulier le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^n]$ des automorphismes polynomiaux de $\mathbf{C}^n$ est loin d'être bien compris. L'étude de ces automorphismes est bien sûr intimement liée aux recherches autour de la fameuse Conjecture du Jacobien (voir [12]). De nombreuses autres questions relatives au groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^n]$ sont naturelles : on peut chercher à déterminer les sous-groupes finis, les sous-groupes de Lie, les sous-groupes linéarisables... On trouvera dans [21] un bel exposé de ces problématiques. Par ailleurs il est apparu récemment que ces automorphismes fournissent des exemples de systèmes dynamiques ayant un comportement très riche. Concernant ces problèmes un article fondateur est [13] ; on pourra se reporter à [35] pour un panorama des progrès accomplis ces dix dernières années. Les questions que nous venons d'évoquer sont délicates en général, sans parler de la possibilité d'étudier ce qu'il advient lorsqu'on remplace $\mathbf{C}$ par un corps quelconque, voire par un anneau. Cependant il existe un cas particulier pour lequel on possède de nombreux résultats : c'est celui de la dimension 2. On dispose en effet d'un théorème de structure, énoncé par H. W. E. Jung dès 1942, qui donne un système de générateurs pour $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$.

Nous noterons $A$ le groupe des automorphismes affines de $\mathbf{C}^2$, *i.e.* le groupe des éléments de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ qui se prolongent en des automorphismes

holomorphes de $\mathbf{P}^2$ ; et nous appellerons $E$ (pour "élémentaire", suivant les notations de [13]) le sous-groupe de $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ constitué des automorphismes qui préservent le pinceau des droites $y = \textit{constante}$. Autrement dit :

$$A = \{(x,y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2); \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbf{C},\ a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\};$$

$$E = \{(x,y) \mapsto (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}^*,\ \gamma \in \mathbf{C},\ P \in \mathbf{C}[X]\}.$$

THÉORÈME 1 (Jung, 1942). *Le groupe* $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ *des automorphismes polynomiaux de* $\mathbf{C}^2$ *est engendré par les automorphismes affines et élémentaires.*

Quelques années après Jung, ce résultat était précisé par W. Van der Kulk de la manière suivante :

THÉORÈME 2 (Van der Kulk, 1953). *Etant donné un corps $k$ (de caractéristique quelconque, algébriquement clos ou non), le groupe des automorphismes polynomiaux de $k^2$ est engendré par les automorphismes affines et élémentaires à coefficients dans $k$. De plus* $\mathrm{Aut}[k^2]$ *est le produit amalgamé de ces deux sous-groupes.*

Après les articles de Jung [19] et Van der Kulk [22] de nombreuses autres preuves, utilisant des techniques différentes, ont été proposées. L'objet de cet article étant de donner encore une nouvelle preuve, nous commençons, afin d'expliquer nos motivations, par un rapide survol des preuves disponibles dans la littérature. D'une manière générale, l'idée commune à toutes ces preuves est de procéder par récurrence sur le degré ; ainsi étant donné un automorphisme

$$g\colon (x,y) \mapsto (g_1(x,y), g_2(x,y))$$

où $g_1$, $g_2$ sont des polynômes de degrés respectifs $d_1$ et $d_2$, il s'agit de montrer que l'on peut abaisser le degré de $g$ en composant successivement par un automorphisme affine puis par un automorphisme élémentaire. Précisément, en composant par un automorphisme affine on peut supposer que $d_1$ est strictement supérieur à $d_2$ ; il reste alors à montrer que la composante homogène de plus haut degré de $g_1$ est un multiple de celle de $g_2$, ce qui se ramène assez facilement à montrer que $d_1$ est un multiple de $d_2$.

La preuve la plus voisine de la nôtre (c'est-à-dire de nature géométrique) est sans doute celle de M. Nagata [28], qui s'inspire de l'article de Van der Kulk. Antérieurement W. Engel [11] avait proposé une preuve, laquelle fut reprise par A. Gutwirth [17]. Nagata commente laconiquement ces deux preuves en

disant qu'elles lui semblent difficiles à lire. Quoi qu'il en soit, l'idée ici est de prolonger $g$ en une application birationnelle de $\mathbf{P}^2$ et de considérer la courbe $C$ préimage par $g$ d'une droite générique. On obtient alors des informations sur les degrés $d_1$ et $d_2$ en étudiant la singularité de $C$ à l'infini.

Dans l'optique de donner une preuve valable sur tout corps, L. Makar-Limanov [23] a proposé une alternative à la preuve de Van der Kulk en adoptant une approche complètement algébrique. L'idée est d'introduire un nouveau degré en accordant des poids différents aux variables $x$ et $y$, en fonction des degrés associés à l'application inverse de $g$. Notons que quelques années plus tard ce même auteur propose par une approche similaire une description du groupe des automorphismes d'une large classe de surfaces affines [24]. Une preuve publiée par W. Dicks en 1983 [9] est une version quelque peu simplifiée de l'argument de Makar-Limanov; on trouvera une rédaction précise de cette preuve dans le livre de P.M. Cohn [8].

Une approche légèrement différente a été proposée par R. Rentschler. Il est assez aisé une fois le théorème de Jung-Van der Kulk acquis de montrer que toute représentation algébrique de $(\mathbf{C},+)$ dans $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ est donnée à conjugaison près par un automorphisme élémentaire. Rentschler emprunte le chemin inverse: il démontre d'abord cette propriété puis remarque que l'on peut en déduire le théorème de Jung. En effet, à l'automorphisme $g$ on peut associer la dérivation localement nilpotente $\partial/\partial g_1$. Cette preuve, publiée comme note au CRAS en 1968 [31], a été reprise en détail récemment par L.M. Drużkowski et J. Gurycz [10].

Une preuve dite élémentaire est publiée en 1988 par J.H. McKay et S.S. Wang [26]; elle repose sur une formule d'inversion. Les auteurs montrent que l'application $g^{-1}$ peut s'exprimer à l'aide d'un calcul de résultants mettant en jeu les polynômes à une variable $g_1(0,t)$, $g_1(t,0)$, $g_2(0,t)$, $g_2(t,0)$. La relation souhaitée entre $d_1$ et $d_2$ en découle.

A l'opposé, on pourra trouver une preuve "sophistiquée" dans le livre de K. Matsuki [25]. L'idée ici est d'utiliser le cadre fourni par la théorie de Mori pour formuler une preuve du théorème de Jung, avec l'espoir que cette démarche permette ensuite d'attaquer l'étude jusqu'alors quasi-inaccessible de la structure du groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^n]$ pour $n \geq 3$.

Citons enfin une dernière approche: dans [1], S.S. Abhyankar et T.T. Moh démontrent que deux plongements biréguliers de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^2$ diffèrent par un automorphisme de $\mathbf{C}^2$, et remarquent que leur preuve implique le théorème de Jung. Divers auteurs ont proposé de nouvelles preuves de ce résultat; on peut citer les articles récents de R.V. Gurjar [16], E. Casas-Alvero [6] et E. Artal-Bartolo [3], tous trois proposant des démonstrations de nature géométrique.

Nous allons voir cependant que si l'objectif est seulement d'obtenir une preuve du résultat de Jung il est possible de donner une preuve géométrique beaucoup plus concise.

A l'origine de notre travail se trouve un postulat fort naturel : le théorème de Jung est un résultat de géométrie birationnelle. Tout automorphisme de $\mathbf{C}^2$ peut en effet se prolonger en une application birationnelle de $\mathbf{P}^2$. Dans ce contexte il nous semble qu'effectuer une récurrence sur le degré n'est pas la démarche la plus naturelle ; le nombre de points d'indétermination s'avère être une quantité plus facile à manipuler. Ceci n'était pas vraiment le point de vue de Jung, malgré son titre : "Sur les transformations birationnelles entières du plan". Cependant, dans une note qui semble être passée inaperçue, O.-H. Keller [20] réagit au travail de Jung en remarquant, sans donner de détails, qu'il est certainement possible de donner une preuve simplifiée en utilisant les résultats connus sur les applications birationnelles de $\mathbf{P}^2$. Plus tard, dans un court article I. R. Shafarevich [32] énonce le théorème de Jung en indiquant que la démonstration repose sur la possibilité de décomposer toute application birationnelle entre surfaces compactes comme une suite d'éclatements (c'est le théorème 6 énoncé au paragraphe suivant) ; malheureusement il ne semble jamais avoir eu l'occasion de publier une telle preuve (dans le complément à son article [34] Shafarevich se contente de renvoyer à un travail de M. H. Gizatullin et V. I. Danilov [14] qui de par son ambition de généralité maximale s'avère de lecture difficile). Enfin, récemment S. Orevkov [30] signale que l'on peut retrouver le théorème de Jung à partir d'un travail de A. G. Vitushkin, mais à nouveau les détails ne sont pas explicités.

Le théorème de Jung est en effet à mettre en parallèle avec un résultat classique généralement attribué à M. Noether [29] :

THÉORÈME 3 (Noether, 1872). *Toute application birationnelle du plan projectif* $\mathbf{P}^2$ *se décompose à l'aide d'automorphismes linéaires et de l'involution quadratique standard*

$$\sigma : [x : y : z] \dashrightarrow [yz : xz : xy] .$$

Il semble que la première preuve complète de cet énoncé soit en fait due à G. Castelnuovo [7], qui déduit le théorème de Noether du résultat intermédiaire suivant :

THÉORÈME 4 (Castelnuovo, 1901). *Toute application birationnelle du plan projectif* $\mathbf{P}^2$ *s'écrit comme une composition d'automorphismes linéaires et d'applications dites de Jonquières.*

A propos des applications de type de Jonquières disons simplement que ce sont les applications de degré $n$ admettant un point base de multiplicité $n-1$ ; le fait remarquable est que les automorphismes polynomiaux qui s'étendent en des applications de type de Jonquières sont précisément (à conjugaison affine près) les automorphismes élémentaires. Ainsi le théorème de Jung peut être vu comme un cas spécial du résultat de Castelnuovo. On pourra trouver dans [27] une preuve du théorème 3 très proche en esprit de la preuve du théorème de Jung que nous proposons dans cet article. Il peut sembler paradoxal que le théorème de Castelnuovo remonte à 1901, alors que celui de Jung qui s'avère être un cas particulier plus facile (en particulier nous n'aurons pas besoin de la notion de multiplicité d'un point d'indétermination qu'utilise Nagata), remonte lui à 1942. Une réponse possible est que Castelnuovo tout comme ses contemporains ne se soit jamais préoccupé de ce problème.

On peut résumer notre démarche en disant que nous nous sommes proposés de donner une preuve du théorème de Jung telle qu'aurait pu la concevoir un géomètre du début du 20$^{e}$ siècle; ou encore, la preuve qui nous paraît se cacher derrière les remarques de Keller et Shafarevich citées plus haut. Notre preuve a le mérite d'être concise, de ne faire intervenir aucun calcul, et de mettre en lumière pourquoi ce résultat est propre à la dimension 2. La méthode étant de nature géométrique, il nous a semblé plus transparent de nous cantonner au cas classique (à savoir que nous travaillons sur le corps $\mathbf{C}$); cependant cette restriction n'est en rien essentielle ainsi que nous le remarquons en fin d'article.

L'article est organisé comme suit.

Le second paragraphe regroupe les résultats de géométrie birationnelle que nous utilisons; ceux-ci sont tout à fait élémentaires et contenus dans votre livre favori d'introduction à la géométrie algébrique (qui est probablement [15], [18] ou [33]).

La preuve proprement dite du théorème de Jung est détaillée dans le troisième paragraphe.

Enfin, dans un dernier paragraphe nous illustrons notre méthode par un exemple puis nous démontrons le théorème de Van der Kulk. Nous indiquons d'abord comment retrouver géométriquement que $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ est le produit amalgamé des sous-groupes affine et élémentaire. Bien noter que ceci est essentiellement une remarque triviale (qui certes se révèle cruciale pour les applications), et que le résultat réellement délicat est celui contenu dans l'énoncé de Jung. Pour finir, nous montrons comment notre preuve s'adapte facilement au cas d'un corps quelconque.