Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 48 (2002)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE PREUVE GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE JUNG
Autor: Lamy, Stéphane
Kapitel: 3. Preuve du théorème de Jung
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66078

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

l'infini dans X (ici nous avons utilisé les formules 5). Comme la première courbe contractée par π_2 doit être d'auto-intersection -1, et ne peut être la dernière courbe produite par π_1 (car cela contredirait le fait que p_s est un point d'indétermination), on obtient bien que la première courbe contractée par π_2 est la transformée stricte d'une courbe contenue dans le diviseur à l'infini de X. La dernière assertion n'est qu'une reformulation de la quatrième, dans le cas où $X = \mathbf{P}^2$. $\square$

3. Preuve du théorème de Jung

Nous considérons g un automorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$, que nous prolongeons en une application birationnelle (toujours notée g) de $\mathbf{P}^2$ dans lui-même. Si g s'écrit

$$g\colon (x,y) \mapsto (g_1(x,y), g_2(x,y))$$

et que n est le degré de g (c'est-à-dire le plus grand des degrés de g_1 et g_2), alors en coordonnées homogènes l'extension de g à $\mathbf{P}^2$ s'écrit

$$g\colon [x:y:z] \dashrightarrow [z^n g_1(x/z, y/z) : z^n g_2(x/z, y/z) : z^n].$$

La droite à l'infini dans $\mathbf{P}^2$ est ici la droite d'équation $z = 0$. Nous voulons montrer que g s'écrit comme une composée d'automorphismes affines et élémentaires. La preuve va s'effectuer par récurrence sur le nombre $\#\operatorname{ind}(g)$ de points d'indétermination de g.

D'après le lemme 9 (assertion 1) le prolongement $g\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ admet un unique point d'indétermination propre situé sur la droite à l'infini. En composant g par un automorphisme affine nous pouvons nous ramener au cas où ce point est $[1:0:0]$. Autrement dit nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P}^2 \arrow[dr, dashed, "g_0"] & \\ \mathbf{P}^2 \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, dashed, "g"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

où a est affine et g_0 admet $[1:0:0]$ comme point d'indétermination. Bien sûr on a

$$\#\operatorname{ind}(g_0) = \#\operatorname{ind}(g).$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P}^2 \arrow[dr, "g_0 \circ \varphi^{-1}"] & \\ \mathbf{P}^2 \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[rr, dashed, "g_0"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

où φ est le prolongement d'un automorphisme élémentaire de $\mathbf{C}^2$, et tel que

$$\#\operatorname{ind}(g_0 \circ \varphi^{-1}) < \#\operatorname{ind}(g_0).$$

Notre démarche va consister à considérer le diagramme donné par le théorème de Zariski [1]):

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbf{P}^2 \arrow[rr, dashed, "g_0"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

et à réordonner les éclatements mis en jeu dans π_1 et π_2. Ainsi, au cours de quatre étapes que nous allons maintenant détailler, φ va être construit en réalisant certains éclatements de la suite π_1 et certaines contractions de la suite π_2.

PREMIÈRE ÉTAPE: ÉCLATEMENT DE $[1:0:0]$

Le point $[1:0:0]$ est le premier point éclaté par π_1 ; considérons donc la surface F_1 obtenue en éclatant $\mathbf{P}^2$ au point $[1:0:0]$. Cette surface est un compactifié de $\mathbf{C}^2$ et est naturellement munie d'une fibration rationnelle correspondant aux droites $y = \textit{constante}$. Le diviseur à l'infini est constitué de deux courbes rationnelles (*i.e.* isomorphes à $\mathbf{P}^1$) s'intersectant transversalement en un point. On distingue d'une part la transformée stricte de la droite à l'infini dans $\mathbf{P}^2$; c'est une fibre que nous noterons f_∞. D'autre part on a le diviseur exceptionnel de l'éclatement, qui est une section pour la fibration: nous la noterons s_∞. On a bien sûr (appliquer les formules 5) $f_\infty^2 = 0$ et $s_\infty^2 = -1$. Plus généralement pour tout $n \geq 1$ nous noterons F_n un compactifié de $\mathbf{C}^2$ muni d'une fibration rationnelle, tel que le diviseur à l'infini soit constitué de deux courbes rationnelles transverses: une fibre f_∞ et une section s_∞ d'auto-intersection $-n$. Ces surfaces sont classiquement

[1]) Chaque fois que nous utiliserons le théorème de Zariski nous noterons M, π_1 et π_2 la surface et les suites d'éclatements produites, le contexte permettant d'éviter toute confusion.

appelées surfaces de Hirzebruch; nous ne présupposons aucune connaissance particulière les concernant. Un point de notation: nous écrirons $s_\infty(F_n)$ et $f_\infty(F_n)$ quand plus d'une surface de Hirzebruch seront mises en jeu.

Revenons à l'application g_0. Considérons le diagramme commutatif:

(D1)
$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[dr, dashed, "g_1"] & \\ \mathbf{P}^2 \arrow[ur, dashed, "\varphi_1"] \arrow[rr, dashed, "g_0"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

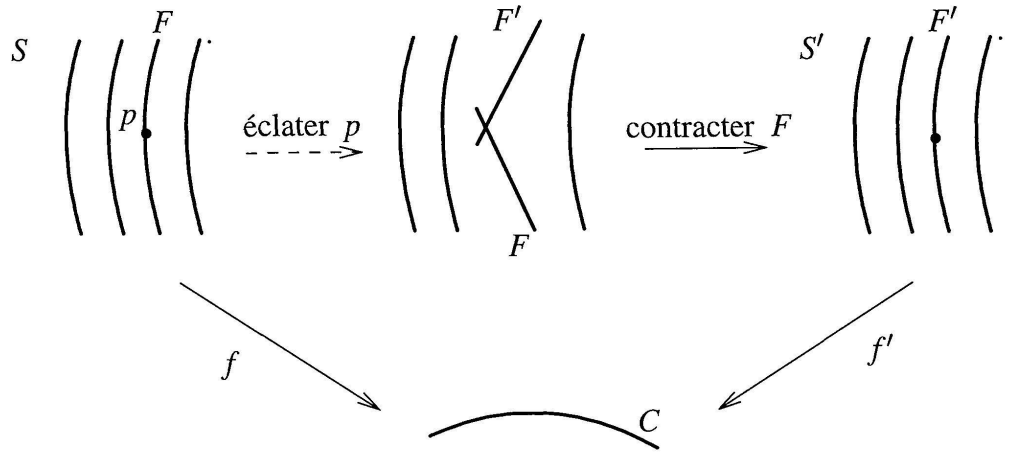
où φ_1^{-1} est l'application d'éclatement au point $[1:0:0]$. On a

$$\#\operatorname{ind}(g_1) = \#\operatorname{ind}(g_0) - 1\,.$$

Reprenons maintenant le diagramme donné par le théorème de Zariski appliqué à g_0. D'après le lemme 9 (assertion 5) la première courbe contractée par π_2, qui doit être une courbe dans M d'auto-intersection -1, est la transformée de la droite à l'infini. Celle-ci correspond à la fibre f_∞ dans F_1. Or dans F_1 on a $f_\infty^2 = 0$. L'auto-intersection de cette courbe doit encore diminuer d'un, donc le point d'indétermination propre p de g_1 est situé sur f_∞. Par ailleurs on sait (lemme 9, assertion 2) que ce même point p appartient à la courbe produite par l'éclatement φ_1^{-1}, à savoir s_∞. Finalement p est précisément le point d'intersection de f_∞ et s_∞.

Deuxième étape: récurrence ascendante

Dans le raisonnement qui va suivre nous utiliserons des applications entre surfaces réglées généralement appelées "transformations élémentaires" (cependant nous n'emploierons pas cette terminologie, ce qui évitera d'ailleurs toute confusion avec les éléments du groupe E). Ces transformations sont la composée d'un éclatement et d'une contraction. Plus précisément soit S une surface réglée, c'est-à-dire une surface munie d'une fibration $f\colon S \mapsto C$ où C est une courbe, et telle que toutes les fibres de f soient isomorphes à $\mathbf{P}^1$. Considérons $p \in S$ et notons F la fibre contenant p. La transformation élémentaire au point p est l'application birationnelle qui consiste à éclater le point p (produisant ainsi un diviseur exceptionnel F') puis à contracter la transformée stricte de F. On obtient ainsi une nouvelle surface réglée S'.



Dans les preuves des lemmes 10 et 11 nous allons utiliser de telles transformations, pour des surfaces réglées de base C isomorphe à $\mathbf{P}^1$.

LEMME 10. *Soit $n \geq 1$, et h une application birationnelle de F_n dans $\mathbf{P}^2$ qui provient d'un automorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$. Supposons que l'unique point d'indétermination propre de h soit le point p intersection de $f_\infty(F_n)$ et $s_\infty(F_n)$. Considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & F_{n+1} \arrow[dr, dashed, "h'"] & \\ F_n \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[rr, dashed, "h"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

où φ consiste à éclater p puis à contracter la transformée stricte de f_∞. Alors l'application birationnelle $h' = h \circ \varphi^{-1}$ satisfait les deux propriétés suivantes :

- $\#\operatorname{ind}(h') = \#\operatorname{ind}(h) - 1$;
- *le point d'indétermination propre de h' est situé sur $f_\infty(F_{n+1})$.*

Preuve. Considérons la décomposition de h en suites d'éclatements :

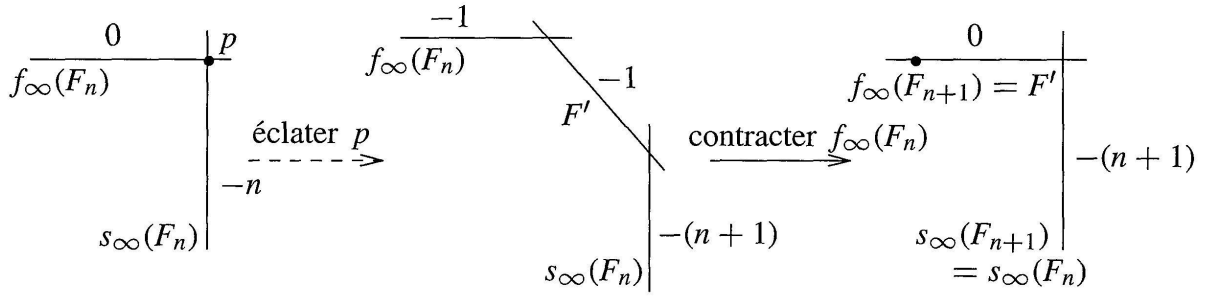
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ F_n \arrow[rr, dashed, "h"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

La transformée (stricte) de $s_\infty(F_n)$ dans M est d'auto-intersection inférieure ou égale à -2 ; le lemme 9 (assertion 4) nous permet d'en déduire que la première courbe contractée par π_2 est la transformée de $f_\infty(F_n)$. La transformée de $f_\infty(F_n)$ dans M est donc d'auto-intersection -1 ; d'autre part dans F_n on a $f_\infty(F_n)^2 = 0$. On en déduit qu'après avoir éclaté p le

reste de la suite d'éclatements π_1 concerne des points hors de f_∞. Au lieu de réaliser ces éclatements puis de contracter la transformée de $f_\infty(F_n)$ on peut renverser l'ordre, à savoir contracter $f_\infty(F_n)$ puis réaliser le reste de la suite d'éclatements. Autrement dit on a un diagramme commutatif (π_p est l'éclatement en p et cont_{f_∞} consiste à contracter la transformée de $f_\infty(F_n)$):

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[dl] \arrow[d, "\mathrm{cont}_{f_\infty}"] & \\
 & & M' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F_n & F_{n+1} \arrow[l, "\pi_p"'] \arrow[r, dashed, "h'"] & & \mathbf{P}^2 \arrow[ull, dashed, bend left, "\overline{h}"]
\end{tikzcd}$$

Les deux applications, éclatement de p puis contraction de $f_\infty(F_n)$, sont résumées dans le dessin suivant où l'on a représenté uniquement les diviseurs à l'infini, en précisant les auto-intersections (celles-ci étant calculées à l'aide des formules 5). On constate en particulier que la surface obtenue est bien de type F_{n+1}.



En conclusion, éclater p diminue d'un le nombre de points d'indétermination, et contracter la transformée de $f_\infty(F_n)$ n'en introduit pas de nouveau: on a bien $\#\mathrm{ind}(h') = \#\mathrm{ind}(h) - 1$. D'autre part le point d'indétermination de h' est situé sur la courbe qui a été produite en éclatant p, à savoir $f_\infty(F_{n+1})$. $\square$

A l'issue de la première étape nous sommes dans les conditions d'application du lemme 10, avec $n = 1$. Le lemme fournit une application $h' : F_2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ dont le point d'indétermination propre est situé sur la fibre $f_\infty(F_2)$. Si ce point est précisément le point d'intersection avec la section à l'infini, on peut de nouveau appliquer le lemme. En répétant ce processus aussi longtemps que l'on reste dans les hypothèses du lemme 10 on obtient un diagramme:

(D2)

$$\begin{tikzcd} & F_n \arrow[dr, dashed, "g_2"] & \\ F_1 \arrow[ur, dashed, "\varphi_2"] \arrow[rr, dashed, "g_1"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

où φ_2 est obtenu en appliquant $n-1$ fois le lemme 10. De plus on a

$$\#\operatorname{ind}(g_2) = \#\operatorname{ind}(g_1) - n + 1\,.$$

Enfin le point d'indétermination de g_2 est situé sur $f_\infty(F_n)$, et n'est pas précisément le point d'intersection avec $s_\infty(F_n)$ (sinon on pourrait appliquer le lemme une fois de plus).

TROISIÈME ÉTAPE : RÉCURRENCE DESCENDANTE

Nous allons appliquer le lemme suivant, qui est analogue au lemme 10 (mais bien noter qu'ici nous supposons $n \geq 2$).

LEMME 11. *Soit $n \geq 2$, et h une application birationnelle de F_n dans $\mathbf{P}^2$ qui provient d'un automorphisme polynomial de $\mathbf{C}^2$. Supposons que l'unique point d'indétermination propre p de h soit situé sur f_∞ mais ne soit pas précisément le point d'intersection de f_∞ et s_∞. Considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & F_{n-1} \arrow[dr, dashed, "h'"] & \\ F_n \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[rr, dashed, "h"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

où φ consiste à éclater p puis à contracter la transformée stricte de $f_\infty(F_n)$. Alors l'application h' satisfait les deux propriétés suivantes :

- $\#\operatorname{ind}(h') = \#\operatorname{ind}(h) - 1$;
- *le point d'indétermination propre de h' est situé sur $f_\infty(F_{n-1})$ et n'est pas le point d'intersection de $f_\infty(F_{n-1})$ et $s_\infty(F_{n-1})$.*

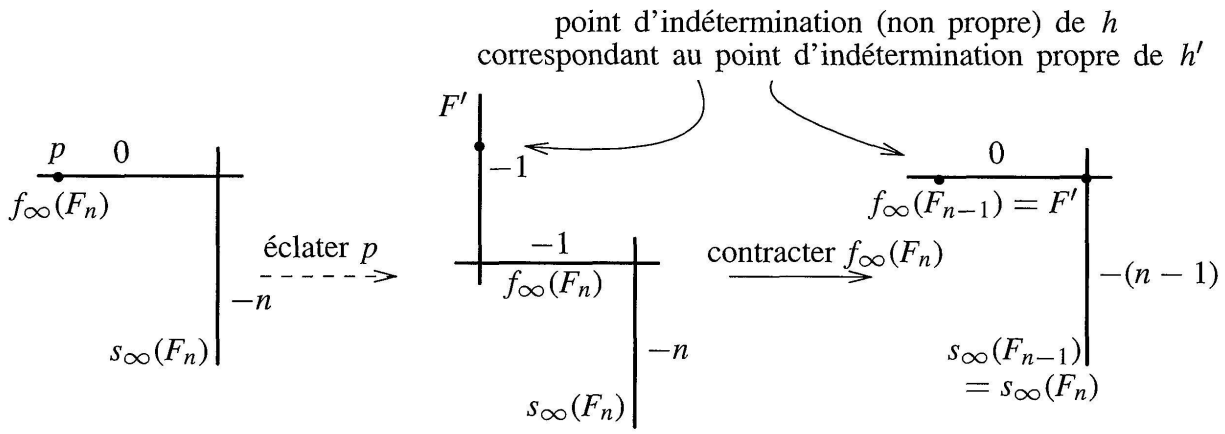
Preuve. Considérons la décomposition de h donnée par le théorème de Zariski :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ F_n \arrow[rr, dashed, "h"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

La transformée de $s_\infty(F_n)$ dans M est d'auto-intersection $-n$, comme $n \geq 2$ on en déduit (lemme 9) que la première courbe contractée par π_2 est la transformée de $f_\infty(F_n)$. Comme dans la preuve du lemme 10 on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, "\mathrm{cont}_{f_\infty}"] \arrow[ddl] & & \\
 & & M' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F_n & F_{n-1} \arrow[l, "\pi_p"'] \arrow[r, dashed, "h'"] & \mathbf{P}^2 \arrow[ll, dashed, bend left, "\bar{h}"] & \\
\end{tikzcd}$$

La surface obtenue en éclatant p puis en contractant la transformée de f_∞ est bien de type F_{n-1} ; ceci est résumé par le dessin suivant.



L'égalité $\#\mathrm{ind}(h') = \#\mathrm{ind}(h) - 1$ est immédiate. Notons F' le diviseur produit en éclatant le point p ; h admet un point d'indétermination (non propre) situé sur F'. De plus ce point ne peut pas être précisément le point d'intersection de F' et de la transformée de $f_\infty(F_n)$, car sinon on aurait $\pi_1^{-1}(f_\infty(F_n))$ d'auto-intersection inférieure ou égale à -2 ce qui contredirait qu'il s'agit de la première courbe contractée par π_2. En conclusion ce point correspond au point d'indétermination propre de h', et celui-ci est donc situé sur $f_\infty(F_{n-1})$ et n'est pas le point d'intersection de $f_\infty(F_{n-1})$ et $s_\infty(F_{n-1})$. $\square$

Après la deuxième étape on se trouve dans les hypothèses du lemme 11. Remarquons de plus que si $n \geq 3$ l'application h' produite satisfait encore les

hypothèses de ce même lemme. Après avoir appliqué $n-1$ fois le lemme 11 nous obtenons un diagramme

(D3)
$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[dr, dashed, "g_3"] & \\ F_n \arrow[ur, dashed, "\varphi_3"] \arrow[rr, dashed, "g_2"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

avec

$$\#\operatorname{ind}(g_3) = \#\operatorname{ind}(g_2) - n + 1\,.$$

Enfin, le point d'indétermination propre de g_3 est situé sur $f_\infty(F_1)$, et n'est pas le point d'intersection de $f_\infty(F_1)$ et $s_\infty(F_1)$.

QUATRIÈME ÉTAPE : DERNIÈRE CONTRACTION

En appliquant le théorème de Zariski à g_3 nous obtenons un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ F_1 \arrow[rr, dashed, "g_3"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

Le lemme 9 (assertion 4) affirme que la première courbe contractée par π_2 est la transformée stricte par π_1 ou bien de f_∞ ou bien de s_∞. Supposons que ce soit la transformée de f_∞. Alors après avoir réalisé la suite d'éclatements π_1 et avoir contracté cette courbe, la transformée de s_∞ est d'auto-intersection 0 et ne pourra donc plus être contractée; ceci vient contredire la troisième assertion du lemme 9. La première courbe contractée est donc la transformée de s_∞, que l'on peut contracter par avance pour obtenir le diagramme suivant :

(D4)
$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P}^2 \arrow[dr, dashed, "g_4"] & \\ F_1 \arrow[ur, "\varphi_4"] \arrow[rr, dashed, "g_3"'] & & \mathbf{P}^2 \end{tikzcd}$$

Le morphisme φ_4 est l'application d'éclatement de diviseur exceptionnel s_∞, que l'on peut choisir (puisqu'elle est définie modulo isomorphisme) de manière à ce que le point sur lequel on contracte soit $[1:0:0]$. On a de plus

$$\#\operatorname{ind}(g_3) = \#\operatorname{ind}(g_4)\,.$$

CONCLUSION

On peut regrouper les quatre diagrammes (D1), ..., (D4) en un seul

$$\begin{tikzcd}
 & F_1 \arrow[r, dashed, "\varphi_2"] \arrow[dr, dashed, "g_1"] & F_n \arrow[r, dashed, "\varphi_3"] \arrow[d, dashed, "g_2"] & F_1 \arrow[dl, dashed, "g_3"] \arrow[dr, "\varphi_4"] & \\
\mathbf{P}^2 \arrow[ur, dashed, "\varphi_1"] \arrow[drr, dashed, "g_0"'] & & \mathbf{P}^2 & & \mathbf{P}^2 \arrow[dll, dashed, "g_4"]
\end{tikzcd}$$

soit de manière condensée:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{P}^2 \arrow[dr, dashed, "g_4"] & \\
\mathbf{P}^2 \arrow[ur, dashed, "\varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1"] \arrow[rr, dashed, "g_0"'] & & \mathbf{P}^2
\end{tikzcd}$$

avec

$$\#\operatorname{ind}(g_4) = \#\operatorname{ind}(g_0) - 2n + 1 \ (\text{où } n \geq 2).$$

Reste à vérifier que $\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est un automorphisme élémentaire. Pour cela il suffit de constater que φ préserve le feuilletage $y = \textit{constante}$, autrement dit que φ préserve le pinceau des droites passant par $[1:0:0]$. Or ceci est immédiat: l'éclatement φ_1 envoie les droites passant par $[1:0:0]$ sur les fibres de F_1, φ_2 et φ_3 respectent les fibrations associées à F_1 et F_n, et enfin la contraction φ_4 envoie les fibres de F_1 sur les droites passant par $[1:0:0]$. L'application g_4 est donc un automorphisme de $\mathbf{C}^2$ qui s'obtient en composant g avec un automorphisme affine puis un automorphisme élémentaire, et satisfaisant l'inégalité:

$$\#\operatorname{ind}(g_4) < \#\operatorname{ind}(g).$$

Par récurrence sur $\#\operatorname{ind}(g)$, ceci termine la démonstration.

4. COMPLÉMENTS

4.1 UN EXEMPLE

Considérons l'automorphisme g suivant:

$$g\colon (x,y) \mapsto (y + \beta(y+\alpha x^2)^2 + \gamma(y+\alpha x^2)^3, y + \alpha x^2) \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}^*.$$