4.3 Preuve sur un corps quelconque

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

des points d'indétermination sur $f_\infty(F_3)$ et $f_\infty(F_2)$ dépend des coefficients γ et β). Enfin on contracte la section $s_\infty(F_1)$, on a ainsi obtenu

$$g'(x,y) = (x + \beta y^2 + \gamma y^3, y) \circ (y,x).$$

4.2 Structure de produit amalgamé

Nous voulons montrer que $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ est non seulement engendré par les sous-groupes A et E, mais que de plus c'est le produit amalgamé de ces deux groupes. Autrement dit nous voulons montrer que toutes les relations dans le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{C}^2]$ sont induites par les relations dans les groupes A et E. Ceci revient à montrer qu'une composition

$$h = a_1 \circ e_1 \circ \cdots \circ a_n \circ e_n \text{ avec } a_i \in A \setminus E, \quad e_i \in E \setminus A$$

n'est jamais égale à l'identité. Bien noter qu'on peut se restreindre à considérer des compositions h de cette forme, à savoir de longueur paire et commençant par un automorphisme affine. En effet si h est de longueur impaire (et supérieure à 3 : bien sûr si h est de longueur 1 ce n'est pas l'identité) on peut faire baisser la longueur de h par conjugaison. De plus si h est de longueur paire et commence par un automorphisme élémentaire, il suffit de considérer h^{-1}.

Chaque automorphisme e_i, vu comme application birationnelle de $\mathbf{P}^2$, contracte la droite à l'infini sur le point $[1:0:0]$ (car on suppose $e_i \notin A$). De plus, dire que $a_i \notin E$ revient à dire que le point $[1:0:0]$ n'est pas un point fixe de a_i. On en déduit que l'extension de h à $\mathbf{P}^2$ contracte la droite à l'infini sur le point $a_1([1:0:0])$, ce qui montre que h n'est pas l'identité.

4.3 Preuve sur un corps quelconque

Etant donné un corps k nous notons A_k et E_k les groupes affine et élémentaire à coefficients dans k ; par $\bar{k}$ nous désignons la clôture algébrique de k. Une première remarque est que notre preuve fonctionne sans aucun changement dans le cas d'un corps algébriquement clos $\bar{k}$ (la caractéristique du corps n'a pas d'importance). Les résultats sur la géométrie des surfaces que nous utilisons, à savoir les propriétés de la forme d'intersection (formules 5) et le théorème de décomposition de Zariski sont énoncés avec un tel degré de généralité par exemple dans le chapitre V de [18]. De même on peut recopier l'argument ci-dessus pour montrer que $\mathrm{Aut}[\bar{k}^2]$ est le produit amalgamé de $A_{\bar{k}}$ et $E_{\bar{k}}$.

Considérons maintenant un corps k non algébriquement clos, et soit g un élément de $\mathrm{Aut}[k^2]$ de degré d. On sait déjà que g est une composée

d'automorphismes affines et élémentaires à coefficients dans $\bar{k}$. Nous allons maintenant en déduire qu'il existe une décomposition ne mettant en jeu que des éléments de A_k et E_k.

Comme précédemment nous considérons g comme une application birationnelle de $\mathbf{P}^2_{\bar{k}}$ dans lui-même. Le point crucial est que nous savons que g admet un *unique* point d'indétermination propre, qui est l'image par g^{-1} de la droite à l'infini. Choisissons un point p de la droite à l'infini dont les coordonnées homogènes soient dans k et qui ne soit pas le point d'indétermination de g^{-1} (l'un des deux points $[1:0:0]$ ou $[0:1:0]$ convient). Alors $g^{-1}(p)$ est le point d'indétermination propre de g, et est donc contenu dans $\mathbf{P}^2_k$. Par un raisonnement symétrique le point d'indétermination propre de g^{-1} est également dans $\mathbf{P}^2_k$. En composant g à droite et à gauche par des éléments bien choisis de A_k on peut donc se ramener au cas où les points d'indétermination de g et g^{-1} sont tous deux $[1:0:0]$. Ceci revient à dire qu'on s'est ramené au cas où la décomposition de g dans le produit amalgamé de $A_{\bar{k}}$ et $E_{\bar{k}}$ commence et finit par un automorphisme élémentaire :

$$g = e_n \circ a_{n-1} \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1 \text{ avec } a_i \in A_{\bar{k}} \setminus E_{\bar{k}}, \quad e_j \in E_{\bar{k}} \setminus A_{\bar{k}}.$$

Une récurrence immédiate montre alors que g s'écrit

$$g\colon (x,y) \mapsto (\gamma y^{d_1 . d_2} + \cdots, \delta y^{d_1} + \cdots)$$

avec $\gamma, \delta \in k^*$ et $d_1, d_2 > 1$ (on a écrit seulement les composantes homogènes de plus haut degré). En composant g à gauche par l'automorphisme $(x,y) \mapsto (x - \frac{\gamma}{\delta^{d_2}} y^{d_2}, y)$ qui est un élément de E_k on obtient un élément de $\mathrm{Aut}[k^2]$ de degré strictement inférieur à celui de g. Par récurrence sur le degré ceci termine la démonstration.

NOTE. Alors que cet article était soumis pour publication J. F. de Bobadilla m'a très aimablement écrit pour me signaler qu'il était l'auteur, de manière à la fois concomitante et indépendante, d'une preuve du théorème de Jung similaire à celle que j'ai exposée ici (voir le chapitre 1 de [5]).

REMERCIEMENTS. J'ai eu l'occasion d'exposer en détail ce travail à divers stades de son élaboration, successivement à l'ENS Lyon, l'Université Fédérale de Porto Alegre et l'Université de Rennes. J'ai chaque fois profité des nombreuses remarques et questions qui m'ont été formulées. Merci également à Thierry Vust pour ses suggestions qui m'ont permis de notablement améliorer la lisibilité de l'article.