Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 48 (2002)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THE NONAMENABILITY OF SCHREIER GRAPHS FOR INFINITE INDEX QUASICONVEX SUBGROUPS OF HYPERBOLIC GROUPS

Autor: Kapovich, Ilya

Kapitel: 3. Hyperbolic metric spaces

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66081

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3. Hyperbolic metric spaces

We refer the reader to [1, 4, 14, 20, 25, 32, 40] for the basic information about Gromov-hyperbolic metric spaces. We briefly recall the main definitions.

If (X,d) is a geodesic metric space and $x,y \in X$, we shall denote by $[x,y]$ a geodesic segment from x to y in X.

Definition 3.1 (Gromov product). Let (X,d) be a metric space and suppose $x,y,z \in X$. We set

$$(x,y)_z := \frac{1}{2}[d(z,x) + d(z,y) - d(x,y)] .$$

Note that $(x,y)_z = (y,x)_z$.

Definition 3.2 (Hyperbolic metric space [1]). Let (X,d) be a geodesic metric space. We say that (X,d) is *δ-hyperbolic* (where $\delta \geq 0$) if for any $p,x,y,z \in X$ we have:

$$(x,y)_p \geq \min\{(x,z)_p, (y,z)_p\} - \delta .$$

The space X is said to be *hyperbolic* if it is δ-hyperbolic for some $\delta \geq 0$.

There are many equivalent definitions of hyperbolicity, for example:

Proposition 3.3 ([1, 20, 32]). *Let (X,d) be a geodesic metric space. Then the following conditions are equivalent.*

1. *The space X is hyperbolic.*
2. *There exists a constant $\delta' \geq 0$ such that if $x,y,z \in X$ and $y' \in [x,y]$, $z' \in [x,z]$ are such that $d(x,y') = d(x,z') \leq (y,z)_x$ then $d(y',z') \leq \delta'$.*
3. (Thin Triangles Condition) *There exists $\delta'' \geq 0$ such that for any $x,y,z \in X$, for any geodesic segments $[x,y]$, $[x,z]$ and $[y,z]$ and for any point $p \in [x,y]$ there is a point $q \in [x,z] \cup [y,z]$ such that $d(p,q) \leq \delta''$.*

Definition 3.4 (Word-hyperbolic group). A finitely generated group G is said to be *word-hyperbolic* if for some (and hence for any) finite generating set A of G the Cayley graph $\Gamma(G,A)$ is hyperbolic.

Definition 3.5 (Gromov product for sets). Let (X,d) be a metric space. Let $x \in X$ and $Q,Q' \subseteq X$. Define $(Q,Q')_x := \sup\{(q,q')_x \mid q \in Q,\ q' \in Q'\}$.