APPENDICE

Autor(en): **Gabber, Ofer**

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$H^1_{\text{ét}}(E_1, \mathbf{Z}/2) \otimes H^1_{\text{ét}}(E_2, \mathbf{Z}/2) \simeq {}_2\operatorname{Br}(E_1 \times E_2).$$

(On pourrait faire le même argument avec la multiplication par un premier $l \geq 2$ à la place de $l = 2$, et avec deux fonctions f et g de diviseur une puissance l-ième.)

Ceci donne en particulier le résultat annoncé.

QUESTION 2. Soit l un nombre premier. Soient $E_1, \ldots, E_d$ des courbes elliptiques (non nécessairement distinctes) sur le corps des complexes, et soit $C/\mathbf{C}$ une courbe projective lisse connexe, de genre suffisamment grand pour que la dimension de $H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l)$ sur $\mathbf{F}_l$ soit au moins d. Soient $f_1, \ldots, f_d \in H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l) \subset \mathbf{C}(C)^*/\mathbf{C}(C)^{*l}$, linéairement indépendants, et pour $i = 1, \ldots, d$, soit $g_i \in H^1_{\text{ét}}(E_i, \mathbf{Z}/l) \subset \mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$ non trivial. Fixons une racine primitive l-ième de 1 dans $\mathbf{C}$. Sur le produit $X = C \times E_1 \times \cdots \times E_d$, on peut considérer le produit tensoriel d'algèbres cycliques $(f_1, g_1)_{\zeta_l} \otimes \cdots \otimes (f_d, g_d)_{\zeta_l}$. C'est une algèbre non ramifiée. Si l'on prend $C, E_1, \ldots, E_d$ suffisamment générales, cette algèbre est-elle un corps gauche ?

APPENDICE

par Ofer GABBER

La question 2, et aussi la question 1 pour des courbes générales, ont une réponse affirmative.

Nous commençons par discuter la question 2. L'idée est de déformer la situation ramifiée de l'exemple 6 en une situation non ramifiée : on peut voir un revêtement de Kummer de $\mathbf{G}_m$ (revêtement qui est ramifié à l'infini) comme limite de revêtements non ramifiés de courbes elliptiques. Par ailleurs une algèbre simple centrale qui a une (bonne) spécialisation à division est elle-même à division.

Nous aurons besoin d'énoncés algébriques généraux.

LEMME A1. *Soit V un anneau de valuation, de corps résiduel $k = V/m$ et de corps des fractions K, et soit A une V-algèbre, libre comme V-module. Si $A \otimes_V k$ est intègre (i.e. est non nulle, et n'admet pas de diviseurs de zéro) alors $A \otimes_V K$ est intègre.*

Démonstration. Il suffit d'observer: $A \otimes_V K \setminus \{0\} = K^* \cdot (A \setminus mA)$.

LEMME A2. *Soient k un corps algébriquement clos et X un k-schéma intègre. Soit K un corps contenant k, et soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X. La fibre de $\mathcal{A}$ au point générique de X est une algèbre à division si et seulement si la fibre de $\mathcal{A} \otimes_k K$ au point générique de $X \times_k K$ est une algèbre à division.*

Démonstration. Soit η le point générique de X. Pour établir l'implication non triviale, il suffit de montrer que l'algèbre $\mathcal{A}_\eta \otimes_k K$ est intègre. Ceci résulte du lemme A1, car K possède une valuation triviale sur k et de corps résiduel k.

PROPOSITION A3. *Soit S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, soit $\pi : X \to S$ un morphisme lisse et de présentation finie, à fibres géométriques connexes. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X. Alors l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de $\mathcal{A}$ au point générique de la fibre géométrique de π en s ne soit pas une algèbre à division est une union dénombrable de sous-ensembles fermés constructibles de S.*

Démonstration. Par l'approximation noethérienne absolue de Thomason, on peut écrire S comme une limite projective filtrante $\varprojlim_\lambda S_\lambda$ de schémas de type fini sur $\mathbf{Z}$, les morphismes de transition étant affines. On peut trouver λ tel que $X \to S$ provienne par image réciproque d'un morphisme de présentation finie $\pi_\lambda : X_\lambda \to S_\lambda$ satisfaisant les mêmes hypothèses que π, et que $\mathcal{A}$ provienne d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}_\lambda$ sur X_λ.

Le lemme A2 implique que l'ensemble $\Phi \subset S$ est l'image réciproque de l'ensemble analogue $\Phi_\lambda \subset S_\lambda$. On est donc ramené à établir la proposition pour S de type fini sur $\mathbf{Z}$. L'ensemble des points du schéma S est alors dénombrable. Il suffit alors pour établir le résultat voulu de montrer que l'ensemble Φ est stable par spécialisation. On peut pour cela remplacer la base par un trait $S = \mathrm{Spec}(V)$. Il faut montrer que si le point générique de S est dans Φ alors il en est de même du point fermé. Soit K'/K une extension finie du corps des fractions K de V tel que la fibre de $\mathcal{A}$ au point générique de $X_{K'}$ ne soit pas une algèbre à division, soit

V' l'anneau d'une valuation de K' étendant celle de V. Il suffit alors d'appliquer le lemme A1 à l'anneau local de $X_{V'}$ au point générique de la fibre spéciale.

REMARQUE. La proposition A3 sera appliquée plus bas dans une situation où S est un produit de courbes (lisses). Il est dans ce cas évident que $X \to S$ et $\mathcal{A}$ proviennent d'objets analogues définis sur un corps de type fini sur le corps premier (ce qui suffirait pour l'argument de dénombrabilité), et même sur une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini. Notons aussi que pour S noethérien, « fermé » et « fermé constructible » sont deux termes équivalents.

PROPOSITION A4. *Soit l un nombre premier. Il existe une courbe $U/\mathbf{Q}$, de corps des fonctions L, un point $P \in U(\mathbf{Q})$ et une courbe elliptique E/L dont le modèle de Néron $\mathcal{E}/U$ est un schéma abélien sur $U \setminus P$, qui a les propriétés suivantes :*

(i) *Il a pour fibre en P le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$.*

(ii) *Sur U, on a une suite exacte de U-schémas en groupes*

$$0 \to \mu_{l,U} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0\,,$$

la fibre en P de $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ étant donnée par l'élévation à la puissance l dans $\mathbf{G}_m$.

(iii) *Toute l-isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbf{C}$ équipée d'un isomorphisme de son noyau avec μ_l est donnée par évaluation de la suite exacte ci-dessus en un point de $U(\mathbf{C})$.*

Démonstration. Pour $l = 2$ on peut utiliser la famille de Legendre de courbes elliptiques, soit $U = \mathrm{Spec}(\mathbf{Q}[\lambda, \lambda^{-1}])$, $P = (\lambda = 1)$, $\mathcal{E}'$ la U-courbe définie comme la partie lisse de la fermeture projective de $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, la section neutre étant l'infini, et $\mathcal{E}$ la normalisation de $\mathcal{E}'$ dans l'extension quadratique de son corps des fonctions définie par $\sqrt{x-1}$. Ceci définit un revêtement non ramifié de $\mathcal{E}'$. Ce revêtement se scinde au-dessus de l'origine : on choisit l'un des relèvements comme section neutre de $\mathcal{E}$. Pour l impair on définit U' comme le schéma des plongements de μ_l dans $\mathcal{E}$. La théorie transcendante (remarque ci-après) montre que U' est une courbe géométriquement irréductible. Soit U'' l'ouvert de U' complémentaire de tous les points situés au-dessus de P sauf un. On dispose alors d'une immersion fermée $\mu_{l,U''} \to \mathcal{E}_{U''}$ et on prend le quotient.

REMARQUE. Pour établir l'irréductibilité géométrique de U', il suffit de considérer le schéma des structures canoniques de niveau l sur la famille de Legendre. Le schéma U' est aussi le schéma des plongements de μ_l dans $\mathcal{E}'$. L'irréductibilité voulue est une conséquence du fait connu (Igusa, [I], Thm. 1) que le groupe de monodromie géométrique du système local ${}_l\mathcal{E}'$ (des points de l-torsion) est $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/l)$.

Dans l'anneau local, sur $\mathcal{E}'$, du point générique de la fibre $\mathcal{E}'_P$, il existe alors une fonction inversible g telle que le revêtement non ramifié $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ soit obtenu par adjonction de $g^{1/l}$. L'extension $L(E) = L(E')(g^{1/l})/L(E')$ se spécialise en P en l'extension $\mathbf{C}(t^{1/l})/\mathbf{C}(t)$, où $\mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[t, t^{-1}])$.

Nous pouvons maintenant répondre par l'affirmative à la question 2*:*

Soit $d \geq 2$ un entier et l un nombre premier. Soit $k \subset \mathbf{C}$ un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, sur lequel la courbe C est définie. Quitte à faire une extension finie de k, on peut supposer que k contient μ_l et que $H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/l) \subset k(C)^*/k(C)^{*l}$ contient des éléments $f_1, \ldots, f_d$ qui sont $\mathbf{Z}/l$-indépendants et qui le restent par extension du corps de base k à $\mathbf{C}$.

Pour $i = 1, \ldots, d$, soient $U_i, P_i, E_i/L_i, \mathcal{E}_i/U_i, g_i$, des exemplaires, au-dessus de k, des objets décrits ci-dessus. Soient $S = U_1 \times_k \cdots \times_k U_d$ et $X = C \times_S \mathcal{E}'_1 \times_S \cdots \times_S \mathcal{E}'_d$ (les différentes courbes C/k et $\mathcal{E}'_i/U_i$ étant toutes relevées sur S). Comme chaque $(f_i, g_i)_{\zeta_l}$ provient d'une algèbre d'Azumaya (évidente), le produit $(f_1, g_1)_{\zeta_l} \otimes \cdots \otimes (f_d, g_d)_{\zeta_l}$ est la restriction d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X.

Par la proposition A3 appliquée au morphisme $\pi \colon X \to S$, l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de $\mathcal{A}$ au point générique de la fibre géométrique de π en s ne soit pas une algèbre à division est une union dénombrable $\bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$ de sous-ensembles fermés de S.

La restriction de l'algèbre au-dessus d'un $\mathbf{C}$-point s de S d'image $O = (P_1, \ldots, P_d) \in S$ définit sur le point générique de $X_s = C \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_m \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_m$ une algèbre à division, comme il résulte de l'exemple 6 (ou plutôt de son extension immédiate aux algèbres cycliques de degré l). Chacun des fermés F_r est donc un fermé propre de S.

Soient alors $A_1, \ldots, A_d$ des $\mathbf{C}$-courbes elliptiques équipées d'une l-isogénie, données par un point $s \in S(\mathbf{C}) = U_1(\mathbf{C}) \times \cdots \times U_d(\mathbf{C})$ n'appartenant pas à l'un des fermés propres F_r. Il suffit par exemple pour cela que les invariants j_{A_i} des différentes courbes soient algébriquement indépendants sur k. Alors l'algèbre (non ramifiée) $(f_1, g_1)_{\zeta_l} \otimes \cdots \otimes (f_d, g_d)_{\zeta_l}$ sur le corps des fonctions du produit $C \times_{\mathbf{C}} A_1 \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} A_d$ est une algèbre à division.

REMARQUE. Si l'on avait considéré la situation directement sur les complexes, puis appliqué la proposition A3, on aurait alors invoqué le théorème de Baire pour assurer l'existence d'un point de $S(\mathbf{C})$ en dehors de l'union, dénombrable, des fermés propres F_r.

Considérons maintenant la question 1.

LEMME A5. *Soit V un anneau de valuation hensélien de corps résiduel k et de corps des fractions K, et soit M un faisceau abélien localement constant pour la topologie étale sur V. Pour tout entier $i \geq 0$, la flèche de restriction $H^i_{\text{ét}}(V, M) \to H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(K), M) = H^i(K, M)$ est injective.*

Démonstration. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, et soit $\overline{k}$ le corps résiduel de la normalisation de V dans $\overline{K}$. Soit $I \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe d'inertie. L'énoncé résulte du fait connu que l'extension

$$1 \to I \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to 1$$

est scindée. Dans le cas particulier considéré plus bas, l'anneau V est un anneau de valuation discrète (de rang un) dont le corps résiduel est de caractéristique zéro, le choix d'une uniformisante et d'un système compatible de racines de cette uniformisante définit un scindage.

LEMME A6. *Soit k un corps algébriquement clos et soient K et L deux corps extensions de k. Soit M un $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module. Pour tout entier $i \geq 0$, la flèche de restriction $H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(K), M) \to H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(K \otimes_k L), M)$ est injective.*

Démonstration. Soit $\alpha \in H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(K), M)$ un élément du noyau. Il existe des k-variétés de type fini X et Y, un faisceau étale $\mathcal{M}$ sur X et un ouvert non vide $V \subset X \times_k Y$, tels que α provienne d'un élément β du noyau de la restriction $H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{M}) \to H^i_{\text{ét}}(V, \mathcal{M})$. En se restreignant à une fibre non vide de $V \to Y$ au-dessus d'un point rationnel de Y, on voit que la restriction de β au corps des fonctions rationnelles de X est nulle. *A fortiori* α est nul.

Nous pouvons maintenant établir l'analogue de la proposition A3 :

PROPOSITION A7. *Soit S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, soit $\pi\colon X \to S$ un morphisme lisse et de présentation finie, à fibres géométriques connexes. Soit i un entier, $\mathcal{F}$ un faisceau étale abélien localement constant constructible sur X et $\alpha \in H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$. Alors l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de α au point générique de la fibre géométrique de π en s est nulle est une union dénombrable de sous-ensembles fermés constructibles de S.*

Démonstration. On procède comme pour la proposition A3. Le lemme A6 permet de se ramener au cas où S est de type fini sur $\mathbf{Z}$. Il suffit alors d'établir un énoncé de spécialisation pour Φ. Celui-ci résulte du lemme A5.

Pour $i = 1, \ldots, d$, soient $U_i, P_i, E_i/L_i, \mathcal{E}_i/U_i, g_i$, des exemplaires, au-dessus de $\mathbf{Q}$, des objets décrits dans la proposition A4. Soient $S = U_1 \times_{\mathbf{Q}} \cdots \times_{\mathbf{Q}} U_d$ et $X = \mathcal{E}'_1 \times_S \cdots \times_S \mathcal{E}'_d$ (les différentes courbes $\mathcal{E}'_i/U_i$ étant toutes relevées sur S). Soit $\alpha = (g_1) \cup \cdots \cup (g_m) \in H^m_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l)$.

Par la proposition A7 appliquée au morphisme $\pi\colon X \to S$, l'ensemble Φ des points $s \in S$ tels que la restriction de α au point générique de la fibre géométrique de π en s ne soit pas nulle est une union dénombrable $\bigcup_{r=1}^{\infty} F_r$ de sous-ensembles fermés de S.

La restriction de α au-dessus d'un $\mathbf{C}$-point s de S d'image $O = (P_1, \ldots, P_d) \in S$ définit sur le point générique de $X_s = \mathbf{G}_m \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} \mathbf{G}_m$ la classe $(x_1) \cup \cdots \cup (x_m)$ (on note ici $\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} = \operatorname{Spec}(\mathbf{C}[x, 1/x])$. Un calcul immédiat de résidus successifs montre que cette classe est non triviale. Chacun des fermés F_r est donc un fermé propre de S. En particulier, on obtient le résultat suivant, qui répond affirmativement à la question 1 :

Soient $E'_1, \ldots, E'_m$ des courbes elliptiques sur $\mathbf{C}$, et $X = E'_1 \times_{\mathbf{C}} \cdots \times_{\mathbf{C}} E'_m$. Si les invariants $j(E'_i)$, $i = 1, \ldots, m$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors la question 1 a une réponse affirmative : la classe

$$g_1 \cup \cdots \cup g_m \in H^m_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l)$$

a une restriction non nulle au point générique de X.