2.1 Rappels de géométrie symplectique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

DÉFINITION. On appelle *max-min* de f le nombre

$$\max\min(f) := \sup\{\lambda \in \mathbf{R} \mid j_\lambda^*\Delta \neq 0\} = -\min\max(-f)\,.$$

THÉORÈME 1.9. *Le minimax de f coïncide avec le max-min.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.8 on peut supposer f générique, donc de Morse excellente. Alors on déduit de la Proposition 1.5 que f et $-f$ ont le même point critique libre. □

Le résultat suivant sera utile plus loin.

PROPOSITION 1.10. *Soit f une fonction excellente, $\bar{\xi}$ un point critique dégénéré de f, de valeur critique $c := f(\bar{\xi})$. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux déformations g, h de f telles que :*

(i) *g et h sont ϵ-proches de f ;*

(ii) *g n'a aucune valeur critique dans $]c-\epsilon, c+\epsilon[$;*

(iii) *h a deux valeurs critiques, $c_1 = f(\bar{\xi}_1)$ et $c_1 = f(\bar{\xi}_2)$ dans $]c-\epsilon, c+\epsilon[$, telles que ξ_1 et ξ_2 sont non dégénérés.*

Alors ξ_1 et ξ_2 sont liés.

Démonstration. Le même argument que pour la preuve du Théorème 1.8 (où l'on considère $E^{c-\epsilon}$ au lieu de $E^{-\infty}$) montre que

$$\widetilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) \simeq \widetilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c+\epsilon})\,.$$

Or, d'après le Théorème 1.2, on a $\widetilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c-\epsilon}) = 0$. Par conséquent $\widetilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) = 0$, c'est-à-dire ξ_1 et ξ_2 sont incidents. Il s'ensuit que ξ_1 et ξ_2 sont liés (Proposition 1.3). □

2. LA SOLUTION DE MINIMAX

2.1 RAPPELS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Soit X une variété différentielle de dimension n, $T^*X = \{(x;y)\}$ le fibré cotangent[3]) de X, $\pi\colon T^*X \to X$ la projection naturelle $(x,y) \mapsto x$. Le fibré T^*X, muni de la forme symplectique canonique $dy \wedge dx$, est une variété symplectique de dimension $2n$.

---

[3]) Pas nécessairement trivial.

On appelle *isotopie hamiltonienne*[4]) le flot au "temps" T d'un hamiltonien

$$h\colon [0,T] \times T^*X \to T^*X\,.$$

Deux sous-variétés du fibré cotangent sont *isotopes* s'il existe une isotopie qui transforme l'une dans l'autre. Une sous-variété de T^*X est *lagrangienne* si sa dimension est égale à la dimension de la base X du fibré et si la forme symplectique s'annule sur cette sous-variété. Une isotopie transforme des sous-variétés lagrangiennes en sous-variétés lagrangiennes.

DÉFINITION. Une *famille génératrice* (globale) d'une sous-variété lagrangienne L du fibré cotangent est une famille de fonctions $\{S_\xi : X \to \mathbf{R}\}_{\xi\in\mathbf{R}^K}$, dépendant des paramètres $\xi \in \mathbf{R}^K$, telle que:

- la fonction $S\colon X \times \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$, définie par $S(x;\xi) := S_\xi(x)$, est de classe C^2 ;
- 0 est une valeur régulière de l'application $(x;\xi) \mapsto \partial_\xi S(x;\xi)$, c'est-à-dire:

$$\mathrm{rk}\big(\partial^2_{\xi\xi}S, \partial^2_{\xi x}S\big)|_{\{\partial_\xi S=0\}} = K\,.$$

- la famille engendre la sous-variété lagrangienne

$$L = \big\{\big(x, \partial_x S(x;\bar\xi)\big) \mid \exists\,\bar\xi \in \mathbf{R}^K : \partial_\xi S(x;\bar\xi) = 0\big\}\,.$$

Etant donnée une famille génératrice $S\colon X \times \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$ d'une sous-variété lagrangienne, les opérations suivantes permettent de construire une nouvelle famille génératrice T (de paramètres η) de la même sous-variété:

(o) *Addition d'une constante:* si $C \in \mathbf{R}$, on pose $\eta = \xi$ et $T(x;\eta) = S(x;\xi) + C$;

(i) *Stabilisation:* si $K' \in \mathbf{N}$ et Q est une forme quadratique non dégénérée de $\mathbf{R}^{K'}$, on pose $\eta = (\xi, \xi')$ et $T(x;\eta) = S(x;\xi) + Q(\xi')$;

(ii) *Difféomorphisme:* si $(x;\eta) \mapsto (x, \xi(x,\eta))$ est un difféomorphisme préservant les fibres du fibré trivial $X \times \mathbf{R}^K \to X$, on pose $T(x;\eta) = S(x;\xi(x,\eta))$.

On remarque que l'opération de stabilisation augmente le nombre de paramètres de la famille génératrice.

DÉFINITION. On dit que deux familles génératrices sont *équivalentes* si l'on peut obtenir l'une à partir de l'autre à l'aide d'une suite d'opérations (o), (i) et (ii).

---

[4]) Dans la suite on ne considérera que des isotopies hamiltoniennes.

En fait, il se trouve que si deux familles sont équivalentes, on peut obtenir l'une de l'autre par une stabilisation, suivie d'un difféomorphisme et de l'addition d'une constante.

DÉFINITION. Une famille génératrice est *quadratique à l'infini* (fgqi) s'il existe une forme quadratique non dégénérée Q_∞ telle que $S(x;\xi) = Q_\infty(\xi)$, pour $|\xi|$ assez grand.

Les fgqi sont une classe très importante de fonctions génératrices pour le résultat suivant d'existence (dû à Sikorav, voir [Sik]) et d'unicité (dû à Viterbo, voir [Vi1], [The]).

THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE SIKORAV-VITERBO. *Si X est une variété fermée*[5]*, toute sous-variété lagrangienne de T^*X isotope à la section nulle $\{(x;0) \mid x \in X\}$ admet une fgqi; de plus, toutes les fgqi d'une telle sous-variété sont équivalentes.*

REMARQUES.

(1) Le théorème reste vrai dans le cas des variétés non compactes si l'isotopie est à support compact ou, ce qui revient au même, si la variété est transversale à la base X en dehors d'un compact, c'est-à-dire si la projection π est une bijection entre L et X.

(2) Il existe une version de contact (pour les sous-variétés legendriennes de J^1X) du théorème d'existence de Sikorav, dû à Yu. Chekanov ([Ch1]), mais pas, à ma connaissance, pour le théorème d'unicité de Viterbo.

DÉFINITION. Soit $\Sigma_L := \{(x,y) \in L \mid \operatorname{rk} D\pi(x,y) < \dim X\}$ l'ensemble des *points singuliers* de L. La *caustique* de L est la projection $\pi(\Sigma_L)$ sur X de l'ensemble des points singuliers.

Génériquement, l'ensemble des points singuliers est l'union de la variété régulière de codimension 1 des points singuliers simples (où le rang de $D\pi$ est $\dim X - 1$) et d'une réunion finie de variétés de codimension au moins 3 (voir [Ar1]).

On rappelle que L est *exacte* si la 1-forme de Liouville $y\,dx$, restreinte à L, est exacte, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\zeta\colon L \to \mathbf{R}$ telle que $y\,dx|_L = d\zeta$. Si c'est le cas, on peut associer à L une sous-variété legendrienne

[5]) C'est-à-dire compacte et sans bord.

$\widehat{L}$ de l'espace $J^1X = \{(x,z,y)\}$ des jets d'ordre 1 sur X (muni de la forme de contact standard $dz - y\,dx$), définie à une constante en z près :

$$\widehat{L} := \{(q, \zeta(q,p), p) \mid (q,p) \in L\}.$$

DÉFINITION. On appelle *front d'onde* ou *diagramme de Cerf* de L l'image F_L de $\widehat{L}$ par la projection $(x,z,y) \mapsto (x,z)$ dans l'espace $J^0X = \{(x,z)\}$ des jets d'ordre 0 sur X.

Soit $S(x;\xi)$ une fgqi de L.

DÉFINITION. L'*ensemble de Maxwell* M_L de L est l'ensemble des points $x \in X$ tels que la fonction de Morse $\xi \mapsto S(x;\xi)$ n'est pas excellente.

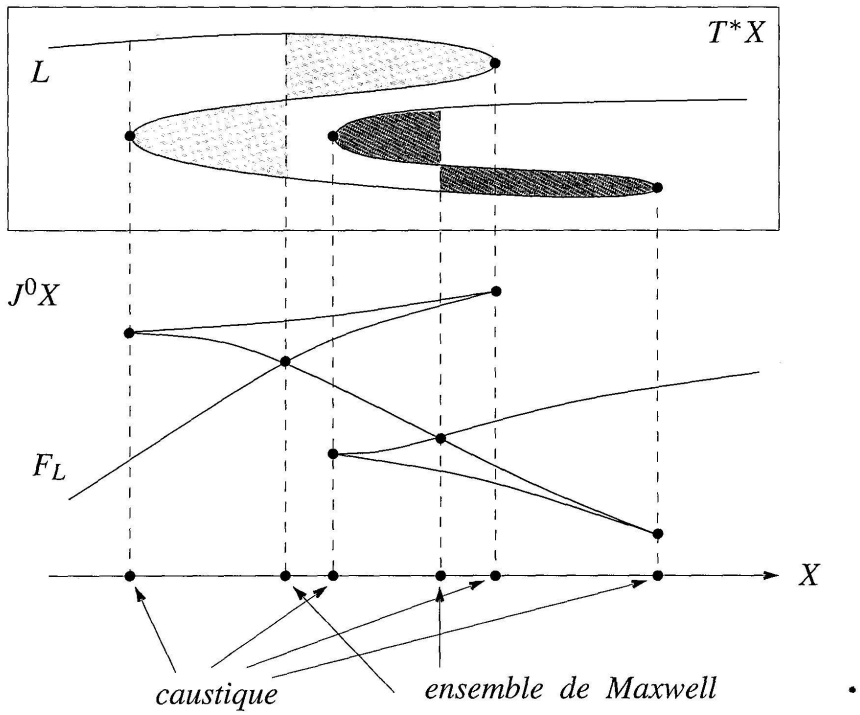

FIGURE 4
Caustique et ensemble de Maxwell d'une courbe lagrangienne et du front associé

REMARQUES.

(1) D'après le théorème d'unicité de Viterbo, l'ensemble de Maxwell ne dépend que de L.

(2) La projection naturelle $F_L \to X$ est une fibration en dehors de la caustique et de l'ensemble de Maxwell (cf. Figure 4).

(3) L'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique est une hypersurface stratifiée (c'est-à-dire une réunion finie de variétés lisses, les *strates*, connexes par arcs, deux à deux disjointes, telles que la fermeture de chaque strate est la même strate et une réunion finie de strates de dimension plus petite), voir [Ar2].

(4) La caustique et l'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique ont mesure nulle.

2.2 La solution géométrique de (PC)

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi sur une variété Q (sans bord, mais pas forcément compacte) de hamiltonien $H : [0,+\infty[\times T^*Q \to \mathbf{R}$ de classe C^2 dans $]0,+\infty[\times T^*Q$ et continue au bord, et donnée initiale $u_0 \colon Q \to \mathbf{R}$ de classe C^1 :

$$(PC) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,q) + H(t,q,\partial_q u(t,q)) = 0, & \forall\ t > 0,\ q \in Q \\ u(0,q) = u_0(q), & \forall\ q \in Q\,. \end{cases}$$

Dans cette section on construit une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent de l'espace temps, la solution géométrique de (PC). Le théorème de Sikorav-Viterbo permet de lui associer une "unique" fgqi $S(t,q;\xi)$. Cette fonction est définie à une constante additive près; une fois cette constante convenablement fixée, S est une solution, en générale multivoque, de (PC). Son graphe[6])

$$\{(t,q,S(t,q;\bar{\xi}) \mid \partial_\xi S(t,q;\bar{\xi}) = 0\}$$

est le front d'onde de la solution géométrique.

Dans la prochaine section on utilisera la méthode de minimax pour choisir en tout point (t,q) un unique point critique de $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$; on obtiendra de cette manière une section du front, qui s'avère être le graphe d'une fonction bien définie, solution faible de (PC).

Sur le fibré cotangent $T^*Q = \{(q,p)\}$, muni de la forme symplectique canonique $dp \wedge dq$, le champ hamiltonien $X_H = (\partial_p H, -\partial_q H)$ induit le flot $\phi \colon [0,+\infty[\times T^*Q \to T^*Q$. Ses composantes $\phi^t(q,p) = (\tilde{q}(t),\tilde{p}(t))$, que l'on appelle les *caractéristiques* de X_H, sont les solutions des équations de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{q}(t) = \partial_p H(t,\tilde{q}(t),\tilde{p}(t))\,, \\ \frac{d}{dt}\tilde{p}(t) = -\partial_q H(t,\tilde{q}(t),\tilde{p}(t))\,, \end{cases}$$

telles que $\tilde{q}(0) = q$ et $\tilde{p}(0) = p$.

---

[6]) Plus précisément, le contour apparent du graphe de S, projection le long de l'axe des ξ.