§6. Mean curvature

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§6. MEAN CURVATURE

Let X be a closed n-dimensional manifold with a Riemannian metric g. Suppose that iterated graphs $\Gamma_k \subset X^k$ are smooth of dimension n. Denote by $\mathrm{Cu}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_k$, the absolute value of the mean curvature of Γ_k at γ. Set

$$\mathrm{lome}_g\, \Gamma = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\Big(1 + \int_{\Gamma_k} [\mathrm{Cu}(\gamma)]^n d\gamma\Big) .$$

When Γ_k are minimal and $\mathrm{lome}_g = 0$ we know that $h \leq$ "lov".

More generally,

$$h(\gamma) \leq \mathrm{lov}\ \Gamma + \mathrm{lome}_g\, \Gamma . \tag{6.0}$$

Proof. Despite the possible dependence of "lome" upon the choice of g, we can proceed as before and reduce (6.0) to the following local estimate:

Take V in the Euclidean space $\mathbf{R}^{\ell=kn}$ and suppose its boundary does not intersect the ball $B_{2\epsilon}$ centered at $v_0 \in V$. Then

$$\epsilon^{-n}\, \mathrm{Vol}\ V + \int_V Cu^n(v) dv \geq C_1 \ell^{C_2} , \tag{6.1}$$

where C_1 and C_2 are constants depending only on n.

To prove (6.1) we consider the normal bundle N of V and its canonical map F into $\mathbf{R}^\ell$. The Jacobian J of F at a point $v + \nu t$ (where $v \in V$, and ν is the unit vector at v normal to V) is equal to $\prod_{i=1}^n (1 + k_i t)$, where k_i are the principal curvatures in the direction ν.

If the distance from $v+\nu t$ to V is equal to t, then $1+k_i t \geq 0$, $i = 1, \ldots, h$, and so

$$J \leq A_n\big(1 + t^n Cu^n(v)\big) . \tag{6.2}$$

Now we observe that every point of the ball B_ϵ can be joined by a shortest normal with V and so

$$C_\ell \epsilon^\ell = \mathrm{Vol}\ B_\epsilon \leq A_n C_{\ell-n} \epsilon^{\ell-n} \int_V \big(1 + \epsilon^n Cu^n(v)\big)\, dv ,$$

where C_ℓ and $C_{\ell-n}$ are volumes of unit balls in $\mathbf{R}^\ell$ and $\mathbf{R}^{\ell-n}$. The last inequality implies (6.1) and so (6.0) is proved.

The inequality (6.2) was extended by Karcher and Heinze to general Riemannian manifolds. Discussions with Karcher about such inequalities influenced my reasoning in this section.