NOTES SUR L'ARTICLE DE M. GROMOV

Autor(en): **CANTAT, Serge**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-66688

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

NOTE DES ÉDITEURS

L'article qui précède a été rédigé en 1976 et a circulé sous la forme d'une prépublication de SUNY, dès 1977. Nous l'avons imprimé ici en l'état, à l'exception de la dernière remarque du § 4, de l'adjonction de trois références et de la correction d'un petit nombre de fautes de frappe. Serge Cantat, que nous remercions, a bien voulu rédiger à cette occasion un court texte pour orienter le lecteur vers quelques-uns des nombreux travaux influencés par l'article de Mikhaïl Gromov.

NOTES SUR L'ARTICLE DE M. GROMOV

par Serge CANTAT

0.1. L'article de M. Gromov a considérablement influencé les travaux sur la conjecture de Shub (reliant entropie topologique et action sur l'homologie) ainsi que l'étude des systèmes dynamiques holomorphes, notamment en ce qui concerne la dynamique à plusieurs variables.

Le texte [14] propose une preuve alternative des résultats principaux obtenus par M. Gromov. Ceux de Shmuel Friedland ([6], [7] et [8]) proposent diverses extensions de ces résultats au cadre des transformations méromorphes des variétés kählériennes (voir [5]).

Les deux pages qui suivent ne concernent que la dynamique holomorphe. Il convient toutefois de noter les articles suivants, qui sont liés à d'autres aspects de l'article de Gromov et contiennent de nombreuses références : [15] et plus généralement l'ensemble des travaux de S. Newhouse sur le sujet, ainsi que [1], qui s'inscrit dans la lignée des travaux d'Artin et Mazur, de Gromov et de Yomdin.

0.2. Bien souvent, on couple les résultats obtenus par M. Gromov à ceux de Y. Yomdin (voir [10], [19]) et de S. Newhouse (voir [15]). Le théorème suivant est un exemple typique.

THÉORÈME 0.1 (Gromov, Yomdin). *Soit M une variété complexe compacte kählérienne et $f\colon M \to M$ une transformation holomorphe de M. Si $\lambda(f)$ désigne le rayon spectral de l'action de f sur la cohomologie de M, alors*

$$h(f) = \log(\lambda(f)).$$

REMARQUE 1. Lorsque M est l'espace projectif $\mathbf{P}^m$, la transformation f est donné par $m+1$ polynômes homogènes de même degré d. L'action de f sur chaque groupe de cohomologie $\mathrm{H}^k(M,\mathbf{Z})$ est la multiplication par d^k. Le rayon spectral $\lambda(f)$ est donc égal au degré topologique $\deg(f) = d^m$ et

$$h(f) = \log(\deg(f)).$$

REMARQUE 2. Le théorème précédent peut être affiné : comme le montre l'article de M. Gromov, il suffit de regarder l'action de f sur les classes de Kähler de M, donc sur les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^{k,k}(M,\mathbf{R})$. En particulier, seule compte la cohomologie de dimension paire pour évaluer $\lambda(f)$. De manière analogue, les variétés stables et instables locales de f sont des sous-variétés complexes de M ; si l'on peut associer une classe d'homologie asymptotique à une variété instable, celle-ci vit dans un groupe du type $\mathrm{H}_{k,k}(M,\mathbf{R})$ (voir [16], [18]).

Ce point de vue est largement utilisé dans [2], dans [4] et [13], ainsi que dans [3] et [11]. Il apparaît aussi dans [6], mais le lemme 3 de cet article est illusoire; cependant, T. C. Dinh et N. Sibony ont trouvé récemment comment adapter les arguments de M. Gromov dans le contexte des transformations méromorphes des variétés kählériennes (voir [5]).

0.3. Dans [9] et [17], un résultat analogue au théorème 0.1 est démontré pour les automorphismes polynomiaux du plan affine $\mathbf{C}^2$. La démarche est proche de celle présentée par M. Gromov au paragraphe 4 de son article : le théorème de Bézout y joue un rôle similaire mais il est couplé aux travaux de A. Katok [12] et à ceux de Y. Yomdin mentionnés plus haut (l'usage du théorème de Bézout est également au cœur de [3]).

L'énoncé est le suivant. Si g est un automorphisme polynomial du plan, notons $\mathrm{algdeg}(g)$ le maximum des degrés des deux polynômes déterminant g, le degré d'un monôme $x^a y^b$ étant égal à $a+b$. La limite

$$\deg(g) = \lim_{k\to\infty} \left(\mathrm{algdeg}(g^k)^{\frac{1}{k}}\right)$$

existe et est un entier. Contrairement au degré algébrique algdeg(g), ce degré deg(g) est invariant par conjugaison: $\deg(hgh^{-1}) = \deg(g)$. Soit $H(g)$ le taux de croissance exponentiel du nombre de points périodiques de g, alors

$$h(g) = H(g) = \log(\deg(g)).$$

RÉFÉRENCES

[1] ARNOL'D, V. I. Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 21* (1990), 1–10.

[2] BEDFORD, E., M. LYUBICH and J. SMILLIE. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math. 112* (1993), 77–125.

[3] BRIEND, J.-Y. et J. DUVAL. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 93* (2001), 145–159.

[4] CANTAT, S. Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. *Acta Math. 187* (2001), 1–57.

[5] DINH, T.-C. et N. SIBONY. Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle. Preprint Orsay, mars 2003.

[6] FRIEDLAND, S. Entropy of polynomial and rational maps. *Ann. of Math. (2) 133* (1991), 359–368.

[7] —— Entropy of rational self-maps of projective varieties. In: *Dynamical Systems and Related Topics (Nagoya, 1990)*, 128–140. Volume 9 of *Adv. Ser. Dynam. Systems*, World Sci. Publishing, River Edge (N.J.), 1991.

[8] —— Entropy of algebraic maps. In: *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, 215–228. Special Issue, 1995.

[9] FRIEDLAND, S. and J. MILNOR. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems 9* (1989), 67–99.

[10] GROMOV, M. Entropy, homology and semialgebraic geometry. In: *Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86*, 225–240. *Astérisque 145–146*, 1987.

[11] GUEDJ, V. Dynamics of rational transformations. Manuscrit, 2002.

[12] KATOK, A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 51* (1980), 137–173.

[13] MCMULLEN, C. T. Dynamics on $K3$ surfaces: Salem numbers and Siegel disks. *J. reine angew. Math. 545* (2002), 201–233.

[14] NEWHOUSE, S. E. Entropy and volume. *Ergodic Theory Dynam. Systems 8** (Charles Conley Memorial Issue) (1988), 283–299.

[15] —— Entropy in smooth dynamical systems. In: *Proc. Int. Congr. Math., Kyoto/Japan 1990, Vol. II*, 1285–1294, 1991.

[16] RUELLE, D. and D. SULLIVAN. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology 14* (1975), 319–327.

[17] SMILLIE, J. The entropy of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Ergodic Theory Dynam. Systems 10* (1990), 823–827.

[18] SULLIVAN, D. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math. 36* (1976), 225–255.

[19] YOMDIN, Y. Volume growth and entropy. *Israel J. Math. 57* (1987), 285–300.

(Reçu le 3 septembre 2003)

Serge Cantat

IRMAR, UMR 6625 du CNRS
Université Rennes I
Campus de Beaulieu, Bât. 22–23
F-35042 Rennes cedex
France
e-mail: cantat@maths.univ-rennes1.fr

vide-leer-empty