1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 49 (2003), p. 237–262

ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES

par Serge CANTAT

1. INTRODUCTION

1.1 Par définition, un endomorphisme d'une variété complexe M est une application holomorphe surjective de M dans elle-même. La question principale abordée dans cet article est la suivante :

Quelles sont les variétés complexes compactes qui possèdent des endomorphismes de degré topologique strictement plus grand que 1 *?*

En d'autres termes, nous cherchons les variétés compactes munies d'une application holomorphe surjective et non injective (*i.e.* non inversible).

Cette question n'est pas neuve. Dans [14], Mikhael Gromov étudie plusieurs exemples d'endomorphismes, notamment sur les espaces projectifs et les surfaces de Hopf, et demande s'il existe des endomorphismes non inversibles sur les Grassmanniennes. Robert Lazarsfeld étend ce problème à toute variété de drapeaux dans [19] et une réponse complète est fournie dans ce cadre par Kapil H. Paranjape et Vasudevan Srinivas dans [22]. De nombreux résultats sont également connus pour les variétés projectives de dimension inférieure ou égale à 3 et pour celles dont le nombre de Picard est égal à 1 ([25] et [3], [6], [8]). Nous brosserons un panorama rapide de la situation dans la partie 2.

1.2 La plus grande part de ce texte concerne les variétés complexes compactes homogènes (kählériennes ou non). Afin de présenter une version concise des principaux résultats, introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. Un endomorphisme f d'une variété complexe compacte M *admet un facteur inversible* si les trois conditions suivantes sont réunies :

(i) il existe une fibration holomorphe localement triviale $\pi : M \to B$ à valeurs dans une variété lisse de dimension non nulle (sauf si M elle-même est réduite à un point),

(ii) les fibres de π sont permutées par f,

(iii) l'endomorphisme $f_B : B \to B$ induit par f est un automorphisme.

REMARQUE 1.1. Nous verrons à la partie 2 et au paragraphe 4.2 que de nombreuses situations conduisent à l'existence de facteurs inversibles pour lesquels l'automorphisme $f_B : B \to B$ est la restriction d'une transformation projective de $\mathbf{P}^N$ à une sous-variété B. Dans ce cas, l'étude de la dynamique de f est grandement simplifiée.

THÉORÈME 1.1. *Soit X une variété complexe, connexe, homogène et compacte. Si $f : X \to X$ est un endomorphisme de X qui n'a pas de facteur inversible, alors :*

(i) *X fibre sur un produit d'espaces projectifs $Q = \mathbf{P}^{m_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{m_k}$, et les fibres sont des nilvariétés.*

(ii) *Les fibres de la fibration sont permutées par f, ce qui détermine un endomorphisme $f_Q : Q \to Q$.*

(iii) *Il existe des endomorphismes non injectifs $f_i : \mathbf{P}^{m_i} \to \mathbf{P}^{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$, et un entier strictement positif l tels que f_Q^l soit l'application diagonale $(f_1, \ldots, f_k)$.*

La démonstration de ce théorème repose sur l'invariance de la fibration de Tits (§4), le résultat de K. H. Paranjape et V. Srinivas mentionné plus haut et une étude de Jörg Winkelmann concernant les variétés parallélisables. Nous donnerons au passage une démonstration simplifiée du théorème de Paranjape et Srinivas dans un cas particulier. De nombreux exemples sont décrits en détails dans la partie 5 et l'essentiel de la preuve est présenté dans les parties 3 et 6.

1.3 Dans une dernière partie, nous abordons un problème légèrement différent qui est motivé par les résultats récents de Jean-Yves Briend et Julien Duval suivant lesquels tout endomorphisme non inversible de l'espace projectif possède une unique mesure d'entropie maximale. La méthode employée semble très souple et devrait s'appliquer à d'autres familles d'endomorphismes. Encore

faut-il trouver des exemples. Nous expliquerons que ces exemples doivent être cherchés sur des variétés dont la dimension de Kodaira est négative et montrerons la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. *Soit M une variété compacte kählérienne dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Soit f un endomorphisme de M non inversible. S'il existe une classe de Kähler $[\alpha]$ telle que $f^*[\alpha]$ soit proportionnelle à $[\alpha]$ alors M est revêtue par un tore et f est revêtue par une transformation affine de ce tore.*

De surcroît, modulo des conjectures classiques sur les variétés kählériennes, il est possible de classer les endomorphismes non inversibles qui ne préservent pas de fibration lorsque la dimension de Kodaira est positive ou nulle.

1.4 PLAN DU TEXTE. La partie 2 dresse un panorama succinct des idées de base utiles pour comprendre les variétés complexes compactes possédant un endomorphisme de degré plus grand que 1. Plusieurs points de vue ne sont pas abordés, notamment la réduction algébrique, le quotient rationnel et les arguments relatifs à la structure des groupes fondamentaux de variétés kählériennes, mais des idées proches sont exploitées dans les parties suivantes.

Les parties 3 à 6 concernent la structure des variétés homogènes munies d'un endomorphisme non inversible. La dernière partie poursuit la partie 2 et démontre la proposition 1.2. La partie 2 peut donc jouer le rôle d'introduction ou de motivation pour les parties 3 à 6, ou pour la partie 7. Puisqu'elle ne présente que des résultats très classiques, elle peut être ignorée par le lecteur averti.

1.5 REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier A. Huckleberry pour son accueil à l'Université de Bochum et les discussions que nous avons eues autour du sujet abordé ici. Les lectures attentives et les remarques des rapporteurs et des rédacteurs de *L'Enseignement Mathématique* ont considérablement amélioré la présentation de cet article. Je les en remercie.

2. ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS COMPLEXES COMPACTES

Dans cette première partie nous dressons un panorama rapide des résultats de base permettant d'aborder la question centrale étudiée dans cet article,