2. Endomorphismes des variétés complexes compactes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

faut-il trouver des exemples. Nous expliquerons que ces exemples doivent être cherchés sur des variétés dont la dimension de Kodaira est négative et montrerons la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. *Soit M une variété compacte kählérienne dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Soit f un endomorphisme de M non inversible. S'il existe une classe de Kähler $[\alpha]$ telle que $f^*[\alpha]$ soit proportionnelle à $[\alpha]$ alors M est revêtue par un tore et f est revêtue par une transformation affine de ce tore.*

De surcroît, modulo des conjectures classiques sur les variétés kählériennes, il est possible de classer les endomorphismes non inversibles qui ne préservent pas de fibration lorsque la dimension de Kodaira est positive ou nulle.

1.4 PLAN DU TEXTE. La partie 2 dresse un panorama succinct des idées de base utiles pour comprendre les variétés complexes compactes possédant un endomorphisme de degré plus grand que 1. Plusieurs points de vue ne sont pas abordés, notamment la réduction algébrique, le quotient rationnel et les arguments relatifs à la structure des groupes fondamentaux de variétés kählériennes, mais des idées proches sont exploitées dans les parties suivantes.

Les parties 3 à 6 concernent la structure des variétés homogènes munies d'un endomorphisme non inversible. La dernière partie poursuit la partie 2 et démontre la proposition 1.2. La partie 2 peut donc jouer le rôle d'introduction ou de motivation pour les parties 3 à 6, ou pour la partie 7. Puisqu'elle ne présente que des résultats très classiques, elle peut être ignorée par le lecteur averti.

1.5 REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier A. Huckleberry pour son accueil à l'Université de Bochum et les discussions que nous avons eues autour du sujet abordé ici. Les lectures attentives et les remarques des rapporteurs et des rédacteurs de *L'Enseignement Mathématique* ont considérablement amélioré la présentation de cet article. Je les en remercie.

2. ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS COMPLEXES COMPACTES

Dans cette première partie nous dressons un panorama rapide des résultats de base permettant d'aborder la question centrale étudiée dans cet article,

à savoir: quelles sont les variétés complexes compactes qui possèdent un endomorphisme holomorphe de degré topologique strictement supérieur à 1 ?

2.1 Dimension de Kodaira

La dimension de Kodaira d'une variété complexe compacte M est un nombre entier $\mathrm{kod}(M)$, éventuellement égal à $-\infty$, qui peut prendre les valeurs $-\infty, 0, 1, 2, \ldots, \dim_{\mathbf{C}}(M)$. Elle est définie de la manière suivante.

Si L est un fibré en droites holomorphe sur M, $\mathrm{H}^0(M, L)$ désignera le $\mathbf{C}$-espace vectoriel constitué des sections holomorphes globales de L. La dimension de ce $\mathbf{C}$-espace vectoriel est finie.

Soit x un point de M et L_x la fibre de L en ce point. L'évaluation des sections de L au point x détermine une application linéaire $\theta_{L_x}\colon \mathrm{H}^0(M, L) \to L_x$. Cette application est identiquement nulle lorsque toutes les sections globales de L s'annulent en x; on dit alors que x est un point base de L. Une fois fixé un isomorphisme de L_x avec la droite vectorielle $\mathbf{C}$, θ_{L_x} s'interprète comme une forme linéaire et celle-ci ne dépend du choix de l'isomorphisme $\mathbf{C} \simeq L_x$ que par un facteur multiplicatif. En tout point x de M qui n'est pas un point base de L, on obtient ainsi un élément $[\theta_{L_x}]$ de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{H}^0(M, L)^*)$. Pour les fibrés en droites qui possèdent au moins une section non nulle, ce procédé détermine une application méromorphe

$$\Theta_L\colon M \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{H}^0(M, L)^*) \tag{1}$$

dont les points d'indétermination sont contenus dans les points bases de L.

Pour chaque entier strictement positif k, cette construction peut être répétée en remplaçant L par la puissance tensorielle $L^{\otimes k}$. La dimension de Kodaira-Iitaka de L est alors définie comme le maximum des dimensions des images $\Theta_{L^{\otimes k}}(M)$:

$$\mathrm{kod}(M, L) = \max_{k>0} \left\{ \dim_{\mathbf{C}}\left(\Theta_{L^{\otimes k}}(M)\right) \right\}, \tag{2}$$

en convenant de poser $\mathrm{kod}(M, L) = -\infty$ si aucune puissance positive de L ne possède de section non nulle.

La dimension de Kodaira de M, $\mathrm{kod}(M)$, est la dimension de Kodaira-Iitaka du fibré canonique de M, noté K_M et défini comme le déterminant du fibré cotangent de M : $K_M = \det(T^*M)$. Les sections holomorphes de K_M sont donc les formes holomorphes de degré maximal. Les applications méromorphes $\Theta_k := \Theta_{K_M^{\otimes k}}$ sont appelées «*applications pluricanoniques*».

2.2 Action d'un endomorphisme et ramification

Si $f\colon M \to M$ est une application holomorphe surjective de M, la transformation f^* consistant à prendre l'image réciproque d'une forme holomorphe par f définit un élément du groupe linéaire $\mathbf{GL}(\mathrm{H}^0(M, K_M))$. En notant F la transformation projective associée à f^*, on a la relation

$$F \circ \Theta_1 = \Theta_1 \circ f. \tag{3}$$

Cette remarque est valable en remplaçant K_M par ses puissances tensorielles positives $K_M^{\otimes k}$, Θ_1 par Θ_k et F par l'action F_k de f sur les sections de $K_M^{\otimes k}$. Lorsque la dimension de Kodaira de M est strictement positive, il existe ainsi une fibration méromorphe invariante par tout endomorphisme. L'action sur la base de la fibration est linéaire: c'est la restriction de F_k à l'image de Θ_k. Le théorème suivant, pour lequel nous renvoyons à [28], §VI, et à [18], §7.6, se déduit facilement de ce qui vient d'être dit.

Théorème 2.1. *Soient M une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle et $\Theta_k\colon M \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$, $k > 0$, les applications pluricanoniques. Si f est une transformation holomorphe surjective de M, il existe une transformation projective périodique F_k de $\mathbf{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$ telle que $\Theta_k \circ f = F_k \circ \Theta_k$.*

Remarque 2.1. Ceci montre que les endomorphismes des variétés complexes compactes dont la dimension de Kodaira est strictement positive se réduisent à des variétes de dimension inférieure. Les cas intéressants se situent donc en dimension de Kodaira 0 et $-\infty$. Lorsque la dimension de Kodaira de M est maximale, *i.e.* $\mathrm{kod}(M) = \dim_{\mathbf{C}}(M)$, les fibres génériques de l'application Θ_k sont finies; par conséquent, tout endomorphisme de M est inversible et le groupe des automorphismes de M est fini (voir [18], §7).

Si $f\colon M \to M$ est une transformation holomorphe surjective d'une variété complexe compacte, le diviseur de ramification R_f de f est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas un difféomorphisme local sur son image. C'est le lieu d'annulation du jacobien de f, donc R_f est l'ensemble vide ou un diviseur. Le théorème suivant montre que R_f est vide dès que la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle. La référence la plus ancienne que je connaisse pour ce résultat est l'article [23] de Klaus Peters.

THÉORÈME 2.2 (K. Peters). *Soit M une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Toute application holomorphe surjective de M dans M est un revêtement non ramifié.*

Démonstration. Supposons que R_f n'est pas vide et fixons une section non nulle ω de $K_M^{\otimes k}$, pour k positif convenable. L'image réciproque de ω par l'itéré $n^{\text{ème}}$ de f est une section de $K_M^{\otimes k}$ qui s'annule sur l'union des diviseurs effectifs R_f, $f^{-1}(R_f)$, ..., $f^{-n-1}(R_f)$. Puisque f est surjective, on obtient ainsi des sections du fibré en droites $K_M^{\otimes k}$ dont le lieu des zéros (comptés avec multiplicité) croît indéfiniment. Ceci est impossible.

2.3 FIBRATION D'ALBANESE

Pour les variétés kählériennes, il existe une deuxième fibration naturelle invariante par tout endomorphisme : la fibration d'Albanese. Notons $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel constitué des 1-formes holomorphes globales de M. Puisque M est supposée kählérienne, chaque forme holomorphe est fermée. En particulier, lorsque γ est un lacet de M, l'intégration d'une 1-forme holomorphe

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$$

ne dépend que de la classe d'homologie $[\gamma] \in \mathrm{H}^1(M, \mathbf{Z})$. La théorie de Hodge montre que la partie sans torsion de $\mathrm{H}^1(M, \mathbf{Z})$ se plonge de cette manière en un réseau cocompact de $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)^*$. Le tore complexe obtenu en quotientant $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)^*$ par ce réseau sera noté $\mathsf{Alb}(M)$: c'est la variété d'Albanese de M.

Choisissons un point base x dans M. Si y est un point de M et ω est une 1-forme fermée, l'intégrale de ω entre x et y dépend du chemin d'intégration choisi, mais les différentes valeurs obtenues coïncident modulo l'intégration de ω sur les lacets basés en x. On dispose ainsi d'une application holomorphe

$$\mathsf{a}_M : M \to \mathsf{Alb}(M), \quad y \mapsto \int_x^y \tag{4}$$

pour chaque choix d'un point base x dans M. C'est la fibration d'Albanese de M. Elle est équivariante sous l'action de tout endomophisme f, l'action induite par f sur $\mathsf{Alb}(M)$ étant la transformation affine associée à l'action de f par image réciproque sur les 1-formes holomorphes (le paramètre de translation provient du choix du point base x).

Pour trouver des endomorphismes non inversibles qui ne préservent aucune fibration, on peut donc supposer que la fibration d'Albanese de M est triviale, c'est-à-dire que ses fibres sont finies ou que l'image est un point. Dans

le premier cas, l'existence d'endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration force M à être un tore (voir [28]). Dans le second cas, le premier groupe d'homologie de M est fini.

2.4 Petite dimension

Le théorème d'Hurwitz montre que les courbes qui possèdent des endomorphismes de degré plus grand que 1 sont la droite projective et les courbes elliptiques. Ceci peut être démontré à l'aide de la remarque 2.1.

Les surfaces qui possèdent des endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration doivent être cherchées parmi celles dont la dimension de Kodaira est 0 ou $-\infty$. A côté des tores et du plan projectif on trouve l'exemple des surfaces toriques; ainsi, la transformation polynomiale $[x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2]$ détermine un endomorphisme du plan projectif qui se relève au plan projectif éclaté en $[0 : 0 : 1]$. Les exemples ainsi construits sur les variétés toriques sont tous conjugués à des endomorphismes du plan projectif par une transformation birationnelle. Ces trois familles d'exemples persistent en toute dimension.

D'après [21], les endomorphismes non inversibles des surfaces kählériennes appartiennent tous à l'une de ces trois familles. De surcroît, les fibrations méromorphes invariantes par des endomorphismes non inversibles deviennent triviales après revêtement fini (voir [5], [21] et les références qui s'y trouvent). La situation pour les surfaces est donc bien comprise. Les blocs élémentaires sont des variétés homogènes.

Pour les variétés projectives de dimension 3 dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle, on dispose également d'une classification. Celle-ci n'apporte pas de surprise (voir [25]). Le cas $\mathrm{kod}(M) = -\infty$ est plus intéressant et plus obscur: Ekaterina Amerik a étudié les endomorphismes des variétés qui admettent une fibration par des espaces projectifs, ceci en dimension quelconque [5], mais peu de résultats sont disponibles pour la situation générale.

2.5 Une question proche

Au lieu de regarder les endomorphismes d'une variété X dans elle-même, on peut s'intéresser aux applications surjectives $f : X \to Y$ entre variétés de même dimension. Dans [3], [4], [6], les variétés de Fano, les quadriques et les variétés projectives avec un nombre de Picard égal à 1 sont traitées. Les méthodes employées ont un corollaire intéressant pour notre étude: une hypersurface lisse H de l'espace projectif $\mathbf{P}^N$, $N > 2$, admet

un endomorphisme non surjectif si et seulement si H est un plan ou une quadrique de $\mathbf{P}^3$ (voir [4] et [8]).

Dans ce texte, nous analysons le cas des espaces homogènes compacts. Ceci permet de quitter le monde des variétés kählériennes et de traiter des exemples significatifs en dimension de Kodaira négative.

3. Variétés homogènes kählériennes

Une variété complexe compacte est homogène si le groupe de ses difféomorphismes holomorphes agit transitivement sur la variété. Dans ce cas, la variété est isomorphe au quotient d'un groupe de Lie complexe G par un sous-groupe de Lie complexe fermé H (voir [2]).

Cette partie classe les endomorphismes des variétés complexes compactes qui sont à la fois kählériennes et homogènes.

3.1 Tores

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie n, Γ un réseau de V et $A = V/\Gamma$ le tore associé. Puisque le fibré tangent de A est trivial, le principe du maximum montre que la différentielle de tout endomorphisme $f\colon A \to A$ est constante. Les endomorphismes de A sont donc les transformations affines de V qui permutent les orbites de Γ. Les homothéties de rapport entier fournissent des exemples explicites mais il existe quelques exemples nettement plus riches.

Exemple 3.1. Soit Λ un réseau de la droite complexe $\mathbf{C}$. Pour tout entier n, Λ^n est un réseau de $\mathbf{C}^n$ stabilisé par l'action des endomorphismes linéaires de $\mathbf{C}^n$ à coefficients entiers. Ainsi, pour $n = 2$, la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

induit un endomorphisme de degré topologique 2^4 sur $\mathbf{C}^2/\Lambda^2$.

3.2 Variétés de drapeaux

Le deuxième type d'exemples est fourni par les variétés de drapeaux, c'est-à-dire les quotients compacts et lisses S/P où S est un groupe de Lie complexe semi-simple et P est un sous-groupe de Lie complexe connexe. Les