2.1 Dimension de Kodaira

à savoir: quelles sont les variétés complexes compactes qui possèdent un endomorphisme holomorphe de degré topologique strictement supérieur à 1 ?

2.1 Dimension de Kodaira

La dimension de Kodaira d'une variété complexe compacte M est un nombre entier $\mathsf{kod}(M)$, éventuellement égal à $-\infty$, qui peut prendre les valeurs $-\infty, 0, 1, 2, \ldots, \dim_{\mathbf{C}}(M)$. Elle est définie de la manière suivante.

Si L est un fibré en droites holomorphe sur M, $\mathrm{H}^0(M, L)$ désignera le $\mathbf{C}$-espace vectoriel constitué des sections holomorphes globales de L. La dimension de ce $\mathbf{C}$-espace vectoriel est finie.

Soit x un point de M et L_x la fibre de L en ce point. L'évaluation des sections de L au point x détermine une application linéaire $\theta_{L_x}\colon \mathrm{H}^0(M,L) \to L_x$. Cette application est identiquement nulle lorsque toutes les sections globales de L s'annulent en x; on dit alors que x est un point base de L. Une fois fixé un isomorphisme de L_x avec la droite vectorielle $\mathbf{C}$, θ_{L_x} s'interprète comme une forme linéaire et celle-ci ne dépend du choix de l'isomorphisme $\mathbf{C} \simeq L_x$ que par un facteur multiplicatif. En tout point x de M qui n'est pas un point base de L, on obtient ainsi un élément $[\theta_{L_x}]$ de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{H}^0(M,L)^*)$. Pour les fibrés en droites qui possèdent au moins une section non nulle, ce procédé détermine une application méromorphe

$$\Theta_L\colon M \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{H}^0(M,L)^*) \tag{1}$$

dont les points d'indétermination sont contenus dans les points bases de L.

Pour chaque entier strictement positif k, cette construction peut être répétée en remplaçant L par la puissance tensorielle $L^{\otimes k}$. La dimension de Kodaira-Iitaka de L est alors définie comme le maximum des dimensions des images $\Theta_{L^{\otimes k}}(M)$:

$$\mathsf{kod}(M,L) = \max_{k>0} \left\{ \dim_{\mathbf{C}}\left(\Theta_{L^{\otimes k}}(M)\right) \right\}, \tag{2}$$

en convenant de poser $\mathsf{kod}(M,L) = -\infty$ si aucune puissance positive de L ne possède de section non nulle.

La dimension de Kodaira de M, $\mathsf{kod}(M)$, est la dimension de Kodaira-Iitaka du fibré canonique de M, noté K_M et défini comme le déterminant du fibré cotangent de M : $K_M = \det(T^*M)$. Les sections holomorphes de K_M sont donc les formes holomorphes de degré maximal. Les applications méromorphes $\Theta_k := \Theta_{K_M^{\otimes k}}$ sont appelées « *applications pluricanoniques* ».