3.1 Notations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

suffisamment régulières, convergentes vers H et u_0 respectivement. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on construit la solution de minimax u_n du problème de Cauchy de hamiltonien H_n et donnée initiale $(u_{0,n})$; il suit que la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$ est la solution de minimax du problème de Cauchy de hamiltonien H et donnée initiale u_0.

3. Caractérisation géométrique de la solution de minimax

3.1 Notations

Soit $J^0\mathbf{R} = \{(q,z)\} \simeq \mathbf{R}^2$ l'espace des jets d'ordre 0 sur $\mathbf{R}$, $\pi_0 \colon J^0\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la projection naturelle $(q,z) \mapsto q$. Un front d'onde dans $J^0\mathbf{R}$ est la projection dans $J^0\mathbf{R}$ d'une courbe legendrienne de $J^1\mathbf{R} = \{(q,z,p)\} \simeq \mathbf{R}^3$ par $\pi_1 \colon (q,z,p) \mapsto (q,z)$. Pour un front générique, les seules singularités possibles sont des cusps et des auto-intersections transverses.

Soit F un front de $J^0\mathbf{R}$. On appelle *section* de F toute partie connexe maximale σ qui est le graphe d'une fonction $\chi_\sigma \colon \pi_0(\sigma) \to \mathbf{R}$ de classe C^1 par morceaux. Une *branche* de F est une section de classe C^1.

Un front est *long* si, en dehors d'un compact de $\mathbf{R}$, il est le graphe d'une fonction, *plat* si sa tangente n'est jamais verticale. On peut dans ce cas coorienter le front en fixant en tout point le vecteur orthonormal dont la coordonnée en z est positive. Si le front est ainsi orienté, on peut distinguer deux types de cusp : *montant*, si en suivant le front, on passe d'une branche à l'autre en la direction de la normale fixée, *descendent* si on passe en la direction opposée.

Deux courbes legendriennes de $J^1\mathbf{R}$ sont *isotopes* (par une isotopie *legendrienne*) s'il existe un chemin de l'une à l'autre dans l'espace des courbes legendriennes plongées de $J^1\mathbf{R}$. Pour la famille correspondante de fronts les perestroikas qui interviennent génériquement sont montrés à la Figure 6; il s'agit des projections des mouvements de Reidemeister pour les nœuds relèvement des fronts dans l'espace de contact (voir par exemple [Ar3]) : *queue d'aronde* (Q), *pyramide* (P), *porte-monnaie* (B) et *auto-tangence sûre*[8]) (J^-).

Les auto-tangences dangereuses[9]) sont interdites car elles correspondent à un point d'auto-intersection de la courbe legendrienne dont le front est la projection. Pour un front plat toutes les auto-tangences sont dangereuses.

---

[8]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est opposée.

[9]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est la même.

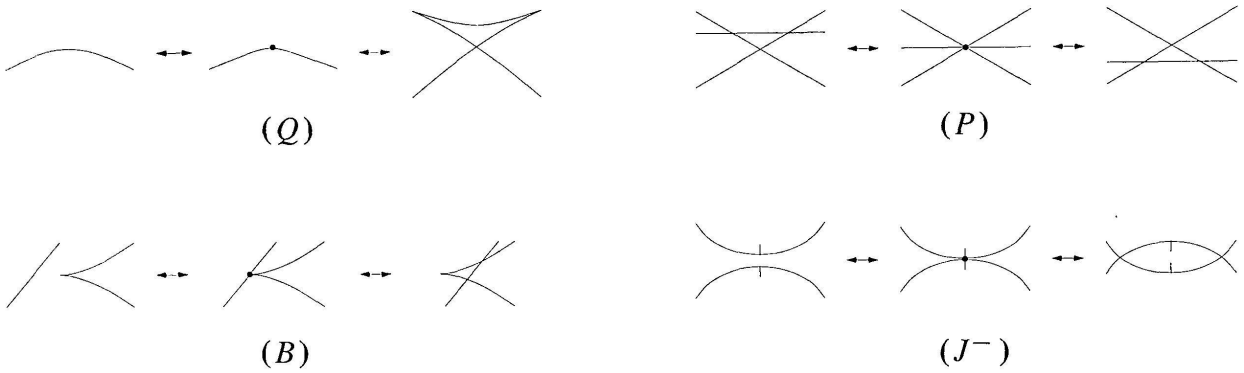

FIGURE 6
Singularités permises dans l'isotopie entre deux fronts

Le nombre de cusps d'un front, comptés avec leur signe (positif pour les cusps montants, négatif pour les cusps descendants), le *nombre de Maslov*, est invariant par isotopies legendriennes.

3.2 DÉCOMPOSITIONS ADMISSIBLES (D'APRÈS CHEKANOV ET PUSHKAR)

Dans cette section on rappelle brièvement la construction d'un nouvel invariant des nœuds legendriens, dû à Yu. Chekanov et P. Pushkar, qui permettra d'établir une caractérisation géométrique de la solution de minimax.

La projection d'un nœud legendrien de $J^1\mathbf{R}$ dans $J^0\mathbf{R}$ par π_1 est un front fermé. Soit Σ un tel front, générique.

On appelle *décomposition* de Σ des courbes $X_1, \ldots, X_n$ fermées, ayant un nombre fini d'auto-intersections, telles que pour $i \neq j$, $X_i \cap X_j$ contient un nombre fini de points, et $X_1 \cup \cdots \cup X_n = \Sigma$.

Un point double $x \in X_i \cap X_j$ de Σ est un *point de saut* si X_i et X_j ne sont pas lisses en x, *de Maslov* si le nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui séparent le long du front les deux branches se coupant en x est 0.

DÉFINITION. Une décomposition $(X_1, \ldots, X_n)$ de Σ est *admissible* si :

(1) chaque X_i est homéomorphe au bord d'un disque : $\partial X_i = B_i$;

(2) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$B_i(q) := \{z \in \mathbf{R} \mid (q, z) \in B_i\}$$

est connexe ; en particulier si c'est un point, ce point est un cusp du front ;

(3) si $(q_0, z) \in X_i \cap X_j$ $(i \neq j)$ est un point de saut alors pour $q \neq q_0$, assez proche q_0, l'ensemble $B_i(q) \cap B_i(q)$ est soit $B_i(q)$, soit $B_j(q)$, soit vide ;

(4) les points de sauts sont tous de Maslov.