6.2 Un théorème de Jörg Winkelmann

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

6.2 Un théorème de Jörg Winkelmann

Sur une variété parallélisable compacte L/Γ, les champs de vecteurs holomorphes globaux sont en correspondance bi-univoque avec les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ de L. Tout endomorphisme ϕ de L/Γ détermine alors un endomorphisme d'algèbre de Lie $\phi_*\colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ (voir [29]). Si L est simplement connexe, il existe donc un automorphisme Φ de L qui stabilise Γ (*i.e.* $\Phi(\Gamma) \subset \Gamma$) et un élément a de L tel que $\phi(g\Gamma) = a\Phi(g)\Gamma$.

Puisque ϕ_* est un morphisme d'algèbre de Lie, il préserve le radical résoluble de $\mathfrak{l}$. Ceci permet de trouver une fibration équivariante de L/Γ à valeurs dans S/Γ' où S est semi-simple. Puisque tous les endomorphismes des algèbres de Lie simples sont intérieurs, l'endomorphisme induit sur la base est un automorphisme et l'un de ses itérés est une translation à gauche. Ce raisonnement peut être poussé un cran plus loin et conduit au théorème suivant de J. Winkelmann [29] :

Théorème 6.1 (J. Winkelmann). *Soit $F = L/\Gamma$ une variété complexe compacte parallélisable et f un endomorphisme holomorphe de F. Si N désigne le nilradical de L, il existe un automorphisme $f'\colon L/N\Gamma \to L/N\Gamma$ qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} L/\Gamma & \xrightarrow{f} & L/\Gamma \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ L/(N\Gamma) & \xrightarrow[f']{} & L/(N\Gamma) \end{array}.$$

Reprenons l'étude de la fibration de Tits commencée au paragraphe 6.1. Le théorème précédent s'applique simultanément à l'action du groupe parabolique P et à celle induite par l'endomorphisme f sur les fibres. Nous pouvons donc énoncer une version fibrée du théorème de J. Winkelmann. Si nous notons L/Γ la fibre de Tits (où Γ est un réseau du groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe L), et N le radical nilpotent de L, nous obtenons un diagramme commutatif de fibrations

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{morphisme fibré}} & Y \\ \Pi\downarrow & & \downarrow\Pi \\ \mathbf{P}^m & \xrightarrow[id]{} & \mathbf{P}^m \end{array}$$

qui est équivariant sous l'action de f ; la variété Y est un espace homogène complexe compact dont la base de Tits est isomorphe à $\mathbf{P}^m$ et la fibre à

$L/(N\Gamma)$; cette variété Y est munie d'un endomorphisme f_Y agissant par automorphisme dans les fibres.

6.3 Endomorphismes agissant par automorphismes dans les fibres

Proposition 6.2. *Soit X une variété homogène complexe compacte dont la fibration de Tits a pour base un espace projectif. Si f est un endomorphisme de degré strictement supérieur à 1 qui agit par automorphisme dans les fibres, la fibration de Tits est un produit.*

Démonstration : première étape. Conservons les notations du paragraphe 6.1 et supposons pour commencer que la fibre de Tits F est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe L. Dans ce cas, quitte à remplacer l'endomorphisme f par l'un de ses itérés, l'action de f dans les fibres se fait par translation. En particulier, son action sur le groupe fondamental des fibres est triviale. Le degré de f étant supérieur à 1, l'action de $\bar{f}$ sur $\pi_2(\mathbf{P}^m)$ est la multiplication par un entier strictement plus grand que 1. L'équivariance de la suite exacte

$$\cdots \to \pi_2(\mathbf{P}^m) \to \pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(\mathbf{P}^m) = \{0\} \to \cdots \tag{22}$$

montre donc que la première flèche a une image finie. Quitte à changer X par un revêtement fini, on peut donc supposer que le groupe fondamental de F s'injecte dans celui de X.

Si nous passons au revêtement universel $\widetilde{X}$ de X, la fibre de la fibration de Tits est alors remplacée par le groupe de Lie simplement connexe L et $\widetilde{X}$ est l'espace total d'un fibré principal sous l'action de L par translations à droite. L'endomorphisme f s'y relève en un morphisme d'espaces fibrés $\widetilde{f}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, qui est équivariant pour l'action de L par multiplication à droite à la source et par multiplication à droite après composition par un automorphisme de L au but. On obtient donc un morphisme $\widetilde{f}$ au-dessus de f entre deux fibrés principaux équivalents. Les classes caractéristiques du fibré principal $\widetilde{X}$ doivent être invariantes par $\bar{f}$ et sont donc nulles, car $\bar{f}$ agit par multiplication par un entier positif strictement plus grand que 1 sur chaque espace de cohomologie. Nous allons employer cette propriété à plusieurs reprises pour montrer que la fibration de Tits est en fait un produit.

Soit W le fibré vectoriel obtenu en faisant le produit fibré du fibré principal $\widetilde{X}$ par la représentation adjointe de L. Il suffit de montrer que ce fibré vectoriel est trivial. Par construction, $\widetilde{X}$ est un fibré principal obtenu par la suspension