2. Les ensembles F(A)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ce théorème est la conséquence facile du théorème suivant, qui annonce l'existence d'une mesure *de Kaufman* sur $F(\mathcal{A})$ pour un tel alphabet.

THÉORÈME 1.4. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers ≥ 1. Nous supposons que $\mathcal{A}$ contient au moins deux éléments et que la dimension de Hausdorff de l'ensemble $F(\mathcal{A})$ est $> \frac{1}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\frac{1}{2} < \delta < \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A})$. Il existe une mesure de probabilité μ sur $F(\mathcal{A})$ et deux constantes > 0, c_1 et c_2, telles que*

- *pour tout borélien S, $\mu(S) \leq c_1(\operatorname{diam} S)^{\delta}$;*
- *pour tout $u > 0$, $|\hat{\mu}(u)| \leq c_2(1+|u|)^{\eta+8\varepsilon}$ avec $\eta = \frac{\delta(1-2\delta)}{(2\delta+1)(4-\delta)}$.*

L'article est construit comme suit : après des rappels sur le développement en fraction continue et les ensembles $F(\mathcal{A})$, nous reprenons en grande partie la construction de Kaufman en l'adaptant à notre propos pour établir le théorème 1.4, puis nous en déduisons le théorème 1.3 par une démarche classique désormais (voir aussi [13],[14]) et qu'utilisait déjà Baker [1].

2. LES ENSEMBLES $F(\mathcal{A})$

Soit $N \geq 2$ et $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers $\subset [1, \ldots, N]$ contenant au moins deux éléments.

Nous nous intéressons à l'ensemble $F(\mathcal{A})$ des irrationnels de $[0, 1)$ dont le développement en fraction continue $[0; a_1, a_2, \ldots]$ est tel que $a_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$.

Si $x = [0; a_1, a_2, \ldots] \in F(\mathcal{A})$, notons $\frac{P_k(x)}{Q_k(x)} := \frac{P_k}{Q_k} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ la k-ième réduite de x ; nous avons ainsi $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = 1$ et $Q_1 = a_1$. Pour exprimer les P_k et Q_k, il est commode d'introduire les matrices de déterminant -1

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i(x) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M_k(x) := A_k(x) \ldots A_1(x) = \begin{pmatrix} P_{k-1}(x) & Q_{k-1}(x) \\ P_k(x) & Q_k(x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Il ressort de ces récurrences que $P_k(x)$ et $Q_k(x)$ sont en fait des polynômes en $a_1, \ldots, a_k$, liés par la relation $P_{k-1}Q_k - Q_{k-1}P_k = (-1)^k$. Par transposition dans (1), il vient :

(2) $$Q_k(a_1, \dots, a_k) = Q_k(a_k, \dots, a_1),$$

et

(3) $$P_k(a_1, \dots, a_k) = Q_{k-1}(a_k, \dots, a_2),$$

d'où

(4) $$\frac{Q_{k-1}}{Q_k} = [0; a_k, \dots, a_1].$$

Cela signifie que deux dénominateurs consécutifs contiennent tout le passé de la fraction continue.

Les réduites fournissent de bonnes approximations rationnelles de x et nous retiendrons

(5) $$x - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{(x_{k+1}Q_k + Q_{k-1})Q_k}$$

où

$$x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \dots].$$

Enfin remarquons que $F(\mathcal{A})$ admet un plus petit et un plus grand élément : le plus petit admet comme fraction continue la suite périodique répétant N, a où N est le plus grand élément de $\mathcal{A}$ et a est son plus petit élément, alors que le plus grand lui répète a, N. Il s'agit donc, pour le plus petit élément, de la solution de

$$x(N + \frac{1}{x+a}) = 1$$

qui est $\geq \frac{a}{aN+1} \geq \frac{1}{N+1}$ alors que le plus grand est $\leq \frac{2N}{2aN+1} \leq \frac{2N}{2N+1}$.

L'ensemble $F(\mathcal{A})$ peut être regardé comme sous-ensemble de $\mathbf{R}$, avec sa topologie et sa mesure, ce que nous nommerons la structure linéaire, ou bien comme un produit infini $\mathcal{A}^{\mathbf{N}^*}$ qui est naturellement muni d'une structure profinie. Les morphismes qui passent d'une structure à l'autre sont respectivement et trivialement l'application qui à un nombre associe son développement en fraction continue et l'application qui à un tel développement associe un réel.... Ces deux structures se ressemblent beaucoup !

LEMME 2.1. *Soit x et y de $F(\mathcal{A})$. Supposons $a_i(x) = a_i(y)$ pour i variant de 1 à k. Alors*

$$|x - y| \leq \frac{N^2}{Q_{k+1}(x)^2}$$

et si $a_{k+1}(x) \neq a_{k+1}(y)$, alors

$$|x - y| \geq \frac{1}{N(N+2)Q_{k+1}(x)^2}.$$

Démonstration. En effet, puisque $Q_j(x) = Q_j(y) := Q_j$, $1 \le j \le k$, par (5),

$$x - y = \frac{(-1)^k (y_{k+1} - x_{k+1})}{(x_{k+1}Q_k + Q_{k-1})(y_{k+1}Q_k + Q_{k-1})}$$

et

$$y_{k+1}Q_k + Q_{k-1} \le \left(\frac{y_{k+1}}{a_{k+1}(x)} + 1\right)\left(a_{k+1}(x)Q_k + Q_{k-1}\right) \le (N+2)Q_{k+1}(x)$$

alors que d'un autre côté

$$y_{k+1}Q_k + Q_{k-1} \ge \frac{1}{a_{k+1}(x)}\left(a_{k+1}(x)Q_k + Q_{k-1}\right) \ge \frac{1}{N}Q_{k+1}(x)\,.$$

Il nous reste à minorer $|y_{k+1} - x_{k+1}|$ sous la seule hypothèse $a_{k+1}(x) \ne a_{k+1}(y)$ (mais aussi $1/x_k \in F(N)$). Le pire qui puisse arriver est que x_{k+1} soit le plus grand possible par rapport à $a_{k+1}(x)$, que $a_{k+1}(y) = a_{k+1}(x) + 1$ et que y_{k+1} soit le plus petit possible. Leur différence serait alors minorée par

$$1 - \frac{\sqrt{N^2+1}}{N+1} + \frac{\sqrt{2}}{N+1} \ge \frac{1}{N}$$

car $1 - \frac{\sqrt{N^2+1}}{N+1} \ge 0$ si $N \ge 1$, et $N\sqrt{2} \ge N+1$ si $N \ge 3$. Il suffit alors de vérifier l'inégalité pour $N = 2$. □

LEMME 2.2. *Soit t et $h > 0$ des réels. Supposons que $h < (N+2)^{-1}$. Alors il existe $\ell \ge 1$ et $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_\ell$ des entiers entre 1 et N tels que*

$$t \le x \le t + h \Longrightarrow a_i(x) = \tilde{a}_i \qquad (i \in \{1, \dots, \ell\})\,.$$

De plus $Q_\ell(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_\ell) \ge (N+2)^{-1}h^{-1/2}$.

Démonstration. La preuve est essentiellement contenue dans le lemme précédent. En effet, comme Q_{k+1} est borné, l'existence ne pose pas de problème. Il nous suffit alors de prendre ℓ maximal, i.e. tel qu'il existe deux points x et y avec $a_{\ell+1}(x) \ne a_{\ell+1}(y)$ et le lemme précédent conclut. □

Si nous désignons par T le shift unilatéral sur $F(\mathcal{A})$ considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{A}^{\mathbf{N}^*}$, de sorte que $Tx := T[0; a_1, a_2, \dots] = [0; a_2, a_3, \dots]$, la fonction $(n, x) \to M_n(x)$ est un cobord matriciel pour T au sens où :

$$M_{k+\ell}(x) = M_\ell(T^k x)M_k(x)\,,$$

soit

$$\begin{pmatrix} P_{k+\ell-1}(x) & Q_{k+\ell-1}(x) \\ P_{k+\ell}(x) & Q_{k+\ell}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\ell-1}(T^k x) & Q_{\ell-1}(T^k x) \\ P_\ell(T^k x) & Q_\ell(T^k x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}(x) & Q_{k-1}(x) \\ P_k(x) & Q_k(x) \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire

$$Q_{k+\ell}(x) = P_\ell(T^k x)Q_{k-1}(x) + Q_\ell(T^k x)Q_k(x)$$

d'où l'encadrement, puisque $P_j \leq Q_j$ pour tout j,

$$1 \leq \frac{Q_{k+\ell}(x)}{Q_\ell(T^k x)Q_k(x)} \leq 2\,. \tag{6}$$

En nous souvenant que $P_j(x)$ et $Q_j(x)$ ne dépendent que des j premiers quotients partiels de x, nous avons montré

LEMME 2.3. *Si tous les a_i sont au moins égaux à 1, la différence*

$$\operatorname{Log} Q_{k+\ell}(a_1, \ldots, a_{k+\ell}) - \operatorname{Log} Q_k(a_1, \ldots, a_k) - \operatorname{Log} Q_\ell(a_{k+1}, \ldots, a_{k+\ell})$$

est en valeur absolue inférieure à $\operatorname{Log} 2$.

3. DIMENSION DE HAUSDORFF

Les ensembles $F(\mathcal{A})$ sont tous de mesure de Lebesgue nulle, mais de dimension de Hausdorff > 0. Good [4] a montré le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers ≥ 0. Soit $m \geq 1$. Soit $\alpha_{m,\mathcal{A}} > 0$ la solution en α de*

$$\sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)^{-2\alpha} = 1\,.$$

Alors la limite de $\alpha_{m,\mathcal{A}}$ quand m tend vers l'infini existe et vaut la dimension de Hausdorff de $F(\mathcal{A})$ muni de la métrique induite par la distance sur $\mathbf{R}$.

En fait, la preuve qui mène à ce résultat est très instructive. En notant

$$\Sigma_m(\alpha) = \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)^{-2\alpha}$$

nous constatons en utilisant (6) que $\Sigma_{m+\ell}(\alpha) \leq \Sigma_m(\alpha)\Sigma_\ell(\alpha)$. Par ailleurs $\Sigma_m(\alpha)$ décroît en α et par conséquent, si $\Sigma_m(\alpha_1) \geq 1$, alors $\alpha_{m,\mathcal{A}} \geq \alpha_1$. Or

$$\Sigma_m(\alpha) \geq N^{-2m\alpha} F_m^{-2\alpha} |\mathcal{A}|^m$$

où F_m est le m-ième nombre de Fibonacci. Nous souhaitons donc avoir

$$-2(\operatorname{Log} N + \frac{1}{m} \operatorname{Log} F_m)\alpha + \operatorname{Log} |\mathcal{A}| \geq 0$$