Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 49 (2003)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ANALYSE DE FOURIER DES FRACTIONS CONTINUES À QUOTIENTS RESTREINTS

Autor: Queffélec, Martine / Ramaré, Olivier

Kapitel: 6. Estimation de la transformée de Fourier

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66692

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LEMME 5.3. *Soit F une fonction C^1 sur $[0,1]$ bornée en valeur absolue par 1 et telle que $|F'(t)| \leq M$. Notons $m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt$. Soit ensuite λ une mesure de probabilité sur $[0,1]$ et notons par $\Lambda(u)$ le maximum des $\lambda[t, t+u]$ pour tout t dans $[0, 1-u]$. Nous avons alors pour tout $r > 0$*

$$\int_0^1 |F(t)|\, d\lambda \leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}).$$

Démonstration. Recouvrons $[0,1]$ par au plus M/r intervalles disjoints de longueur r/M. Il reste au plus un intervalle de plus petite longueur. Soit N le nombre de ces intervalles sur lesquels $\sup|F(t)| \geq 2r$. En utilisant le théorème des accroissements finis, nous constatons que $|F(t)| \geq r$ sur tous les intervalles considérés. Par conséquent

$$m_2 \geq N r^2 \frac{r}{M}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 |F(t)|\, d\lambda &\leq 2r + (N+1)\Lambda(r/M) \\ &\leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}). \qquad \square\end{aligned}$$

6. ESTIMATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Nous nous occupons ici du comportement asymptotique de

$$\hat{\mu}(u) = \int_0^1 e(ut) d\mu(t)$$

pour $|u|$ grand; nous supposerons, sans rectriction, u positif.

Commençons par rappeler que si $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ et $t = T^J(x) = [0; a_{J+1}, \ldots]$

$$\begin{aligned}[0; a_1, a_2, \ldots, a_J + t] &= \frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} \\ &= \frac{P_J}{Q_J} + \frac{(-1)^J t}{(Q_J + tQ_{J-1})Q_J}.\end{aligned}$$

Partons donc de $J = kJ_0$ fixé: par construction, nous pouvons décomposer notre mesure μ sous la forme

$$\mu = \underbrace{\nu \times \cdots \times \nu}_{k} \times \mu := \rho_k \times \mu$$

de sorte que

$$\hat{\mu}(u) = \int_0^1 \int e\left(\frac{P_J(x) + tP_{J-1}(x)}{Q_J(x) + tQ_{J-1}(x)} u\right) d\rho_k(x)\, d\mu(t)$$
$$:= \int_0^1 F(t)\, d\mu(t)\,,$$

où

$$F(t) = \int e\left(\frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} u\right) d\rho_k \tag{10}$$

à laquelle nous nous proposons d'appliquer les lemmes précédents. Puisque J est fixé, nous avons

$$Q^{1-2\varepsilon} \le Q_J \le Q^{1+2\varepsilon}\,, \quad \frac{1}{2N} Q^{1-2\varepsilon} \le Q_{J-1} \le Q^{1+2\varepsilon}\,, \tag{11}$$

avec $Q = \exp(J\sigma_m(\delta))$; mais, comme Q tend vers l'infini avec J, nous pouvons le choisir au voisinage d'un nombre fixé à l'avance, à une constante multiplicative près (constante comprise entre $\exp(J_0\sigma_m(\delta))$ et son inverse).

Nous commençons par déduire des lemmes 5.1 et 5.2 une estimation de $m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt$.

LEMME 6.1. *Si $Q^{2+4\delta} \ge u$, nous avons*

$$\int_0^1 |F(t)|^2 dt \ll_N \frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}}\,.$$

Démonstration. En développant le carré, nous obtenons

$$\int_0^1 |F(t)|^2 dt = \iiint_0^1 e\left(\left(\frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} - \frac{P_J^* + tP_{J-1}^*}{Q_J^* + tQ_{J-1}^*}\right) u\right) dt\, d\rho_k\, d\rho_k$$

où $P_J^*, Q_J^*, \ldots$ sont des variables indépendantes de $P_J, Q_J, \ldots$ et identiquement distribuées. Notre expression se réécrit :

$$\iint e\left(\left(\frac{P_J}{Q_J} - \frac{P_J^*}{Q_J^*}\right) u\right) \int_0^1 e(f(t))\, dt\, d\rho_k\, d\rho_k$$

où l'on a posé

$$f(t) = \frac{t(-1)^J u}{(Q_J + tQ_{J-1})Q_J} - \frac{t(-1)^J u}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)Q_J^*}\,. \tag{12}$$

L'argument $f(t)$ de l'exponentielle admet pour dérivée :

$$f'(t) = \left(\frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2} - \frac{1}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} \right) (-1)^J u$$

soit encore

$$f'(t) = \frac{(Q_J + Q_J^* + t(Q_{J-1} + Q_{J-1}^*))(Q_J - Q_J^* + t(Q_{J-1} - Q_{J-1}^*))}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} (-1)^J u\,,$$

qui pourra s'écrire $g(t)(\alpha t + \beta)$ avec :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{Q_J + Q_J^* + t(Q_{J-1} + Q_{J-1}^*)}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} \\ &= \frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} + \frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)}\,. \end{aligned}$$

Il nous faut aussi calculer

$$g'(t) = -\frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} h(t)$$

où nous avons posé

$$h(t) = Q_{J-1} + Q_{J-1}^* + \frac{2Q_{J-1}^*(Q_J + tQ_{J-1})}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)} + \frac{2Q_{J-1}(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)}{(Q_J + tQ_{J-1})}\,.$$

Nous poursuivons l'estimation de

$$\int_0^1 e(f(t))\,dt \quad \text{notée } \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) \tag{13}$$

en discutant selon l'existence ou non d'un point stationnaire pour f, i.e. d'un point $t \in [0,1)$ tel que $f'(t) = 0$ ce qui impose $Q_{J-1} \neq Q_{J-1}^*$, et $t = -(Q_J - Q_J^*)/(Q_{J-1} - Q_{J-1}^*) \in [0,1)$.

1) Tout d'abord rappelons (voir (4)) que si $Q_{J-1} = Q_{J-1}^*$ et $Q_J = Q_J^*$, $a_i = a_i^*$ pour tout $i \leq J$; les points P_J/Q_J et P_J^*/Q_J^* sont donc confondus, et $\kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) = 1$ d'après (12) et (13). Compte tenu du lemme 2.1 et du caractère höldérien de μ (proposition 4.1 a)), la contribution de ce terme dans le calcul de la transformée de Fourier sera au plus

$$\begin{aligned} &\iint_{\{Q_J = Q_J^*, Q_{J-1} = Q_{J-1}^*\}} \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*)\; d\rho_k\; d\rho_k \\ &\qquad \leq \int \rho_k\Big(\Big[\frac{P_J}{Q_J} - \frac{N^2}{Q_J^2}, \frac{P_J}{Q_J} + \frac{N^2}{Q_J^2}\Big]\Big) d\rho_k \\ &\qquad \ll \frac{1}{Q^{2\delta - \delta\varepsilon}}\,. \end{aligned}$$

2 a) Supposons qu'il y ait un point stationnaire (en particulier $Q_{J-1} \neq Q^*_{J-1}$); alors le lemme 5.2 donne

$$\kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q^*_J, Q^*_{J-1}) \ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|u}}. \tag{14}$$

En effet, avec les notations du lemme 5.2,

$$|g(t)| \geq a = \frac{1}{4} Q^{-3-6\varepsilon},$$

et

$$|g'(t)| \leq 10 Q^{-3+14\varepsilon} = b;$$

l'estimation suit en se rappelant que

$$|\alpha| = |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| u.$$

b) Supposons maintenant plus généralement que $1 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H_0$ et $|(Q_J - Q^*_J)/(Q_{J-1} - Q^*_{J-1})| \leq 2$; si H décrit les entiers de la forme 2^j entre 1 et H_0, cet ensemble est approximativement la réunion sur j des ensembles

$$2^{j-1} \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq 2^j, \quad |Q_J - Q^*_J| \leq 2|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|.$$

En posant $H = 2^j$,

$$\{H/2 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H,\ |Q_J - Q^*_J| \leq 2|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|\}$$
$$\subset \{H/2 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H,\ |Q_J - Q^*_J| \leq 2H\},$$

de sorte que

$$\iint_{\{H/2 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H,\ |Q_J - Q^*_J| \leq 2|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|\}} d\rho_k\, d\rho_k$$
$$\ll \iint_{\{H/2 \leq |P_J - P^*_J| \leq H,\ |Q_J - Q^*_J| \leq 2H\}} d\rho_k\, d\rho_k$$

en utilisant l'invariance de la mesure ρ_k par la transformation $(a_1, \ldots, a_J) \to (a_J, \ldots, a_1)$ (proposition 4.1 b)) ainsi que (2) et (3).

Or les hypothèses $H/2 \leq |P_J - P^*_J| \leq H$, $|Q_J - Q^*_J| \leq 2H$ impliquent clairement,

$$\left| \frac{P_J}{Q_J} - \frac{P^*_J}{Q^*_J} \right| \leq \frac{|P_J - P^*_J|}{Q_J} + \frac{|Q_J - Q^*_J| P^*_J}{Q_J Q^*_J} \ll \frac{H}{Q^{1-2\varepsilon}};$$

donc, si nous conservons dans ce cas les estimations 14 de κ obtenues dans le cas a) d'existence d'un point stationnaire, nous obtenons une contribution de l'ordre de

$$\iint_{\{H/2\leq|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|\leq H,\ |Q_J-Q^*_J|\leq 2|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|\}} \kappa(Q_J,Q_{J-1},Q^*_J,Q^*_{J-1})\ d\rho_k d\rho_k$$
$$\ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{Hu}} \iint_{\left|\frac{P_J}{Q_J}-\frac{P^*_J}{Q^*_J}\right|\leq H/Q} d\rho_k d\rho_k$$
$$\ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{Hu}}(H/Q)^{\delta}$$

en se souvenant de la propriété höldérienne de μ (proposition 4.1 a)).

En sommant sur j, nous trouvons pour l'ensemble

$$\left\{1\leq\left|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}\right|\leq H_0,\ |Q_J-Q^*_J|\leq 2\left|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}\right|\right\}$$

une contribution totale d'au plus

$$\frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{Q^{\delta}\sqrt{u}}H_0^{\delta-1/2}.$$

c) Si $\left|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}\right|\geq H_0$ cette fois, le même lemme fournit une contribution de l'ordre de

$$Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}/\sqrt{H_0u}.$$

3 a) Si $Q_{J-1}\neq Q^*_{J-1}$ et $\left|(Q_J-Q^*_J)/(Q_{J-1}-Q^*_{J-1})\right|\geq 2$, il n'y a pas de point stationnaire et nous sommes dans les conditions d'application du lemme 5.1 qui nous donne la majoration

$$\kappa(Q_J,Q_{J-1},Q^*_J,Q^*_{J-1})\ll\frac{Q^{3+26\varepsilon}}{(|Q_J-Q^*_J|+\left|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}\right|)u}. \tag{15}$$

En effet il résulte des calculs précédents, en reprenant la minoration de $|g(t)|$, que

$$|f'(t)|\geq|\beta||g(t)|\gg uQ^{-3-6\varepsilon}|Q_J-Q^*_J|$$

et en dérivant $f'(t)=(\alpha t+\beta)g(t)$ nous déduisons

$$\begin{aligned}|f''(t)|&\leq|\alpha||g(t)|+(|\alpha|+|\beta|)|g'(t)|\\&\ll Q^{-3-6\varepsilon}|Q_J-Q^*_J|u+Q^{-3+14\varepsilon}(|Q_J-Q^*_J|+\left|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}\right|)u\\&\ll Q^{-3+14\varepsilon}(|Q_J-Q^*_J|+\left|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}\right|)u,\end{aligned}$$

d'où la majoration annoncée.

Le cas $\left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right| \geq H_0$ ayant été pris en compte à l'étape précédente, il suffit de considérer l'ensemble $1 \leq \left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right| \leq H_0$, $\left|(Q_J-Q_J^*)/(Q_{J-1}-Q_{J-1}^*)\right| \geq 2$ et la discussion se poursuit ainsi :

b) Supposons $1 \leq \left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right| \leq H_0$ et $\left|Q_J-Q_J^*\right| \geq 2H_0$; la majoration du lemme 5.1 nous donne une contribution de

$$\frac{Q^{3+26\varepsilon}}{H_0 u}.$$

c) Supposons $\left|Q_J-Q_J^*\right| \leq 2H_0$ (ce qui implique $1 \leq \left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right| \leq H_0$) ; cet ensemble se décrit comme la réunion sur j, avec $1 \leq 2^j \leq H_0$, des ensembles

$$\left\{\left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right| \leq 2^j,\ 2^j \leq \left|Q_J-Q_J^*\right| \leq 2^{j+1}\right\}.$$

Utilisons alors les estimations (15) de κ, établies dans le cas a) sans point stationnaire, nous obtenons par des arguments similaires

$$\begin{aligned}
&\iint_{\{1\leq\left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right|\leq H,\ H\leq\left|Q_J-Q_J^*\right|\leq 2H\}} \kappa(Q_J,Q_{J-1},Q_J^*,Q_{J-1}^*)\ d\rho_k d\rho_k \\
&\qquad \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu}\iint_{\{1\leq\left|P_J-P_J^*\right|\leq H,\ H\leq\left|Q_J-Q_J^*\right|\leq 2H\}} d\rho_k d\rho_k \\
&\qquad \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu}\iint_{\left|\frac{P_J}{Q_J}-\frac{P_J^*}{Q_J^*}\right|\leq H/Q} d\rho_k d\rho_k \\
&\qquad \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu}(H/Q)^{\delta}.
\end{aligned}$$

En sommant sur j, nous trouvons pour l'ensemble

$$\left\{1 \leq \left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right| \leq H_0,\ \left|Q_J-Q_J^*\right| \geq 2\left|Q_{J-1}-Q_{J-1}^*\right|\right\}$$

une contribution totale d'au plus

$$\frac{Q^{3+26\varepsilon}}{H_0^{1-\delta}Q^{\delta}u}.$$

Il s'agit en fait essentiellement du carré de la quantité précédente. Comme notre intégrale est inférieure à 1, nous pouvons négliger ce terme (aux $Q^{26\varepsilon}$ près).

4) Enfin la dernière contribution qu'il faille ajouter vient du cas $Q_{J-1} = Q^*_{J-1}$ mais $Q_J \neq Q^*_J$; il se traite comme le cas 3) précédent et fournit un terme majorant du même ordre de grandeur.

Nous sommes en mesure de terminer la preuve du lemme : le choix optimal dans l'estimation est donné par $H_0 = Q$; en négligeant la contribution des cas 3) et 4), cela nous donne

$$m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt \ll_N \frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}}$$

comme attendu. □

Pour estimer $\hat{\mu}(u) = \int_0^1 F(t)\, d\mu(t)$, nous pouvons maintenant utiliser le lemme 5.3 avec la fonction F et la mesure μ : par construction, la fonction de répartition de μ est höldérienne d'exposant δ et $M = 2\pi Q^{-2+4\varepsilon} u$ convient. Pour tout $r > 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(u)| &\ll r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}) \\ &\ll r + r^\delta Q^{2\delta} u^{-\delta} + \frac{Q^{2\delta-2+4\varepsilon} u^{1-\delta}}{r^{3-\delta}} \left(\frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}} \right). \end{aligned}$$

Nous choisissons Q de façon à égaliser les deux termes de l'estimation de m_2, ce qui revient à prendre $Q^{2+4\delta}$ de l'ordre de u ; comme nous l'avons remarqué en effet, nous pouvons, u étant fixé, choisir $J = kJ_0$ suffisamment grand, i.e. k suffisamment grand, pour rendre Q proche de $u^{\frac{1}{2+4\delta}}$: il suffit de prendre

$$k = \left[\frac{\log u}{(2+4\delta)\sigma_m J_0} \right]$$

pour avoir

$$Q^{2+4\delta} = e^{(\sigma_m kJ)(2+4\delta)} \leq u \leq Q^{2+4\delta} e^{(\sigma_m J_0)(2+4\delta)}.$$

Il en résulte

$$|\hat{\mu}(u)| \ll r + r^\delta u^{\delta/(1+2\delta)} u^{-\delta} + u^{\delta/(1+2\delta)} u^{1-\delta} r^{\delta-3} u^{(-\delta+13\varepsilon)/(1+2\delta)} \tag{16}$$

$$\ll r + r^\delta u^{-2\delta^2/(1+2\delta)} + u^{(\delta-2\delta^2+15\varepsilon)/(1+2\delta)} r^{\delta-3}. \tag{17}$$

Il reste à optimiser en $r < 1$. Choisissons-le de façon à égaliser les deux termes extrêmes qui sont dominants. En ignorant ε, cela revient à prendre r tel que

$$r = r^{\delta-3} u^{(\delta-2\delta^2)/(1+2\delta)}$$

ou encore

$$r = u^{\eta} \quad \text{avec } \eta = \frac{\delta - 2\delta^2}{(4-\delta)(1+2\delta)}$$

ce qui est licite si l'on suppose $\delta > 1/2$. En reportant dans (17), il vient

$$|\hat{\mu}(u)| \ll u^{\eta} + u^{-7\delta^2/[(4-\delta)(1+2\delta)]} + u^{\eta} u^{15\varepsilon/(1+2\delta)} \ll u^{\eta+8\varepsilon},$$

car le second terme est négligeable.

Nous avons ainsi établi le théorème 1.4.

7. Une question de Montgomery

Montgomery a posé dans [12] la question suivante (problème 45) :

Existe-t-il un nombre normal à quotients partiels bornés ?

Définition 7.1. Un nombre $x \in [0,1)$ est normal en base q où q est un entier $q \geq 2$ si et seulement si la suite $(q^n x)$ est équirépartie modulo 1, ce qui, via le critère de Weyl, s'écrit :

$$\forall k \neq 0, \ \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n<N} e(kq^n x) = 0.$$

Le théorème de Borel établit que si $q \geq 2$, presque tout nombre (au sens de la mesure de Lebesgue) est normal en base q. C'est le théorème ergodique appliqué à la transformation $x \in [0,1) \to qx \bmod 1$. Qu'en est-il en restriction à un sous-ensemble de nombres irrationnels de $[0,1)$? Un outil est le suivant :

Théorème 7.2 (Davenport-Erdős-LeVeque). *Soit (s_n) une suite d'entiers et soit μ une mesure de probabilité portée par $[0,1)$ telle que*

$$\sum_{N\geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m,n=1}^{N} \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) < \infty,$$

pour tout entier $k \neq 0$, alors pour μ-presque tout $x \in [0,1)$, la suite $(s_n x)$ est équirépartie modulo 1.

Démonstration. Fixons $k \neq 0$. Notons $S_{N,k}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n<N} e(ks_n x)$, et $I_{N,k} = \int |S_{N,k}(x)|^2 d\mu(x)$. L'hypothèse n'est autre que

$$\sum_{N\geq 1} \frac{I_{N,k}}{N} < +\infty, \quad \forall k \neq 0.$$

Nous utilisons un lemme classique sur les séries :