3.11 Proof of Theorem 1.15

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

The following important theorem shows that this action extends to Q_m.

THEOREM 3.22 ([BEG]). *There exists a unique representation of the algebra eH_me on Q_m in which an element $q \in \mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$ acts by multiplication and an element $q \in \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ by L_q.*

Proof. Since by Proposition 3.5, L_q preserves Q_m, we get a uniquely defined representation of the subalgebra of eH_me generated by $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$ and $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ on Q_m. The result now follows from Theorem 3.21. □

3.10 PROOF OF THEOREM 1.8

Finally we can prove Theorem 1.8.

To do this, observe that as an eH_me-module, Q_m is in the category $\mathcal{O}(eH_me)$, and $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ acts locally nilpotently in Q_m (by degree arguments). We can now apply Theorem 3.18 and Theorem 3.17 and deduce that Q_m is a direct sum of modules of the form $eM(0,\tau)$. As a $\mathbf{C}[\mathfrak{h}] \rtimes \mathbf{C}[W]$-module, $M(0,\tau) = \mathbf{C}[\mathfrak{h}] \otimes \tau$. On the other hand, by Chevalley's theorem, there is an isomorphism $\mathbf{C}[\mathfrak{h}] \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbf{C}[W]$, commuting with the action of W and $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$. Thus we get an isomorphisms of $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$-modules

$$eM(0,\tau) \simeq (M(0,\tau))^W \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes (\mathbf{C}[W] \otimes \tau)^W \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \tau,$$

proving that $eM(0,\tau)$ and hence Q_m is a free $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$-module. □

EXAMPLE 3.23. For $W = \mathbf{Z}/2$ and $\mathfrak{h} = \mathbf{C}$, take the polynomials 1, x^{2m+1}. Notice that $L(1) = L(x^{2m+1}) = 0$ while $s(1) = 1$, $s(x^{2m+1}) = -x^{2m+1}$, $s \in \mathbf{Z}/2$ being the element of order two. It follows that Q_m as a eH_me-module is the direct sum of $\mathbf{C}[x^2] \oplus x^{2m+1}\mathbf{C}[x^2]$. These modules are irreducible. Moreover, $\mathbf{C}[x^2] \simeq eM(0,\mathbf{1})$, $x^{2m+1}\mathbf{C}[x^2] \simeq eM(0,\varepsilon)$, ε being the sign representation.

3.11 PROOF OF THEOREM 1.15

Let I be a nonzero two-sided ideal in $\mathcal{D}(X_m)$. First we claim that I nontrivially intersects Q_m. Indeed, otherwise let $K \in I$ be a lowest order nonzero element in I. Since the order of K is positive, there exists $f \in Q_m$ such that $[K,f] \neq 0$. Then $[K,f] \in I$ is of smaller order than K, a contradiction.

Now let $f \in Q_m$ be an element of I. Then $g = \prod_{w \in W} {}^w f \in I$. But g is W-invariant. This shows that the intersection J of I with the subalgebra H_m in $\mathcal{D}(X_m)$ is nonzero. But H_m is simple by Theorem 3.19, so $J = H_m$. Hence, $1 \in J \subset I$, and $I = \mathcal{D}(X_m)$. □