2.2 The upper bound

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2.2 The upper bound

Let H be any subgroup of G. Choose $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{B}_0$ in G/H with respective cardinalities $\lceil r/|H| \rceil$ and $\lceil s/|H| \rceil$ and such that

$$|\mathcal{A}_0 + \mathcal{B}_0| = \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil).$$

Now choose $\mathcal{A}$ of cardinality r and $\mathcal{B}$ of cardinality s in G such that the image of $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) by the canonical projection on G/H is included in $\mathcal{A}_0$ (resp. $\mathcal{B}_0$). One has

$$|\mathcal{A} + \mathcal{B}| \leq \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H|.$$

This proves the first lemma we need.

Lemma 1. *For any finite Abelian group G*

$$\mu_G(r,s) \leq \min_{H \leq G} \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H|.$$

The second useful point is synthesized in the next folkloric lemma.

Lemma 2. *Let G be a finite Abelian group. For any positive integer m, the following two propositions are equivalent*

(i) *m divides* $\exp G$,

(ii) *there exists a subgroup H of G such that G/H is isomorphic to $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.*

In the case of a *cyclic* group K, trivial considerations (take two sets with consecutive elements), show that, for any $u, v \leq |K|$,

$$\mu_K(r,s) \leq r + s - 1. \tag{2.2}$$

Using consecutively Lemma 1, inequality (2.2) and Lemma 2 yields the following chain of inequalities:

$$\begin{aligned}
\mu_G(r,s) &\leq \min_{H \leq G} \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H| \\
&\leq \min_{H \leq G,\ G/H \text{ cyclic}} \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H| \\
&\leq \min_{H \leq G,\ G/H \text{ cyclic}} \left(\lceil r/|H| \rceil + \lceil s/|H| \rceil - 1\right)|H| \\
&= \min_{|G/H| \text{ divides } \exp G} \left(\lceil r/|H| \rceil + \lceil s/|H| \rceil - 1\right)|H| \\
&= \min_{f \mid \exp G} \left(\lceil rf/|G| \rceil + \lceil sf/|G| \rceil - 1\right) \frac{|G|}{f}.
\end{aligned}$$

The change of variable $d = |G|/f$ yields a parameter d subject to the two restrictions $\frac{|G|}{\exp G} \mid d$ and $d \mid |G|$; this proves the upper bound in Theorem 4.